ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ασκησιολόγιο για το μάθημα "Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι"

Διδάσκοντες: Παναγιώτης Ε. Σινιόρος, Καθηγητής
Νικόλαος Μ. Μανουσάκης, Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος 2018-2019

- ***Ένα μικρό εργοστάσιο παραλαμβάνει ενέργεια από υδατόπτωση παροχής $100m^3$ νερού ανά 1 min. Η υδατόπτωση κινεί στρόβιλο βαθμούς απόδοσης 50%. Ο στρόβιλος κινεί γεννήτρια, βαθμού απόδοσης 91%, δίνοντας τάση 220V και ρεύμα 70A. Η ηλεκτρική ισχύς χρησιμοποιείται για την κίνηση ηλεκτροκινητήρα με βαθμός απόδοσης 78%. Να υπολογιστούν: η ηλεκτρική ισχύς της γεννήτριας, η μηχανική ισχύς του κινητήρα, η ισχύς στον άξονα του στροβίλου, η ισχύς που παρέχει η υδατόπτωση, το ύψος της υδατόπτωσης και ο βαθμός απόδοσης ολόκληρου του συστήματος. Οι ηλεκτρικές απώλειες θεωρούνται αμελητέες και η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $10m/s^2$.***

<u>Λύση</u>

Η ηλεκτρική ισχύς της γεννήτριας θα είναι:

$$P_{\eta\lambda} = V \cdot I = 220V \cdot 70A = 15400W$$

Η μηχανική ισχύς του κινητήρα είναι:

$$P_{\mu\eta\chi} = n'' \cdot P_{\eta\lambda} = 0,78 \cdot 15400W = 12012W$$

Η ισχύς στον άξονα του στροβίλου είναι:

$$P_{\sigma\tau\rho} = \frac{P_{\eta\lambda}}{n'} = \frac{15400W}{0,91} = 16923W$$

Η ισχύς που παρέχει η υδατόπτωση είναι:

$$P_{\upsilon\delta\alpha\tau} = \frac{P_{\sigma\tau\rho}}{n} = \frac{16923W}{0,50} = 33846W$$

Το αποδιδόμενο έργο της υδατόπτωσης σε χρονικό διάστημα 1min είναι:

$$W_{\upsilon\delta\alpha\tau} = P_{\upsilon\delta\alpha\tau} \cdot t_{\upsilon\delta\alpha\tau} = 16923W \cdot 60s = 1015380J$$

Όμως το νερό έχει πυκνότητα $\rho = 1\frac{g}{cm^3} = 1\frac{10^{-3}Kg}{\left(10^{-2}\right)^3 m^3} = 1\frac{10^{-3}Kg}{10^{-6}m^3} = 10^3\frac{Kg}{m^3}$, άρα τα $100m^3$ αντιστοιχούν σε μάζα:

$$m = \rho \cdot U = 10^3\frac{Kg}{m^3} \cdot 100m^3 = 100000Kg$$

Αλλά το αποδιδόμενο έργο της υδατόπτωσης θα ισούται με την δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας. Έτσι:

$$W_{\upsilon\delta\alpha\tau} = m \cdot g \cdot h_{\upsilon\delta\alpha\tau} \Rightarrow h_{\upsilon\delta\alpha\tau} = \frac{W_{\upsilon\delta\alpha\tau}}{m \cdot g} = \frac{1015380J}{100000Kg \cdot 10\frac{m}{s^2}} \Rightarrow h_{\upsilon\delta\alpha\tau} = 1m$$

Επομένως, το ύψος της υδατόπτωσης είναι 1m.

Ο συνολικός βαθμός απόδοσης θα είναι:

$$N = \frac{P_{\mu\eta\chi}}{P_{\eta\lambda}} \cdot \frac{P_{\eta\lambda}}{P_{\sigma\tau\rho}} \cdot \frac{P_{\sigma\tau\rho}}{P_{\upsilon\delta\alpha\tau}} = n'' \cdot n' \cdot n = 0,78 \cdot 0,91 \cdot 0,50 \Rightarrow N = 0,355$$

- ***Ένα κυλινδρικός αγωγός διαμέτρου 4mm, μήκους 2m και ειδικής αντίστασης 200μΩ·cm, τροφοδοτείται από πηγή σταθερής τάσης 20V. Να βρεθεί η ένταση και η πυκνότητα τους ρεύματος που τον διαρρέει.***

Λύση

Ισχύει ο νόμος του Ohm, δηλαδή:

$$I = \frac{V}{R}$$

Η αντίσταση R μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του μήκους l, της ειδικής αντίστασης ρ και της διατομής S του αγωγού ως:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

Εάν η διάμετρος του κυλινδρικού αγωγού είναι d, η διατομή του θα είναι:

$$S = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = \frac{V}{\rho \cdot \frac{l}{S}} \Rightarrow I = \frac{V \cdot S}{\rho \cdot l} \Rightarrow I = \frac{V \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}}{\rho \cdot l} \Rightarrow I = \frac{V \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot \rho \cdot l} \Rightarrow$$

$$I = \frac{20V \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot 10^{-3} m\right)^2}{4 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot 10^{-2} m \cdot 2m} \Rightarrow I = 62,83A$$

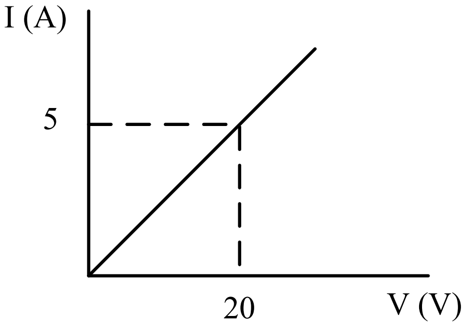
Η πυκνότητα του ρεύματος υπολογίζεται από την **γενικευμένη μορφή του νόμου του Ohm**:

$$J = \gamma \cdot E$$

όπου J η πυκνότητα του ρεύματος, γ η ειδική αγωγιμότητα και E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι:

$$J = \gamma \cdot E \Rightarrow J = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l} \Rightarrow J = \frac{1}{200 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot 10^{-2} m} \cdot \frac{20V}{2m} \Rightarrow J = 5000 \, {}^{kA}\!/_{m^2}$$

- ***Μια γραμμική αντίσταση έχει την ακόλουθη χαρακτηριστική τάσης-ρεύματος. Να υπολογιστεί η τιμή της, η ισχύς που καταναλώνεται σε αυτή εάν το ρεύμα που την διαρρέει είναι 10A και η ενέργεια που δαπανάται σε χρονικό διάστημα 1h.***



<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζεται από την ευθεία και τον άξονα των τάσεων. Αυτή είναι:

$$\tan\varphi = \frac{I}{V} = \frac{5A}{20V} \Rightarrow \tan\varphi = 0,25s \Rightarrow G = 0,25s$$

Επομένως, η αγωγιμότητα είναι ίση με $0,25s$. Όμως γνωρίζουμε ότι η αγωγιμότητα είναι το αντίστροφο της αντίστασης, δηλαδή:

$$G = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{G} \Rightarrow R = \frac{1}{0,25s} \Rightarrow R = 4\Omega$$

Άρα η γραμμική αντίσταση έχει τιμή 4Ω.
Η ισχύς υπολογίζεται από την σχέση:

$$P = V \cdot I$$

Από τον νόμο του Ohm γνωρίζουμε ότι $V = I \cdot R$. Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση, η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση είναι:

$$P = \left(I \cdot R\right) \cdot I \Rightarrow P = I^2 \cdot R \Rightarrow P = \left(10A\right)^2 \cdot 4\Omega \Rightarrow P = 400W$$

Η ενέργεια που δαπανάται θα είναι:

$$E = P \cdot t \Rightarrow E = 400W \cdot \left(3600s\right) \Rightarrow E = 1440kJ$$

- ***Η τιμή της αντίστασης του νήματος ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα στην θερμοκρασία των 20°C είναι 25Ω . Όταν συνδεθεί σε τάση 220V διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως 0,55Α και η θερμοκρασία της φθάνει στους 2100°C. Να υπολογισθεί ο συντελεστής θερμοκρασίας α του βολφραμίου, υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο το νήμα του λαμπτήρα.***

<u>Λύση</u>

Σε θερμοκρασία $\theta_1 = 20^o C$, η αντίσταση του λαμπτήρα είναι $R_{\theta_1} = 25\Omega$. Σε θερμοκρασία $\theta_2 = 2100^o C$ η τιμή της αντίστασης του λαμπτήρα υπολογίζεται έμμεσα από τον νόμο του Ohm. Έτσι:

$$R_{\theta_2} = \frac{V}{I} \Rightarrow R_{\theta_2} = \frac{220V}{0,55A} \Rightarrow R_{\theta_2} = 400\Omega$$

Επίσης, για μια μη γραμμική αντίσταση που μεταβάλλεται με την θερμοκρασία ισχύει:

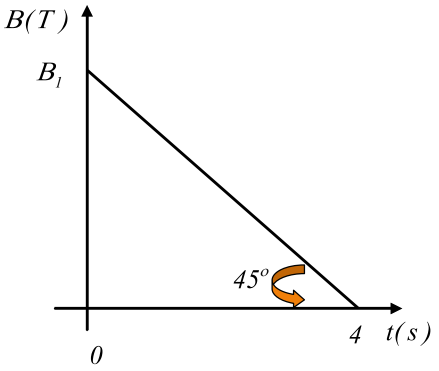
$$R_{\theta_2} = R_{\theta_1} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \Delta\theta\right)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ο ζητούμενος συντελεστής θερμοκρασίας ως εξής:

$$R_{\theta_2} = R_{\theta_1} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \Delta\theta\right) \Rightarrow \frac{R_{\theta_2}}{R_{\theta_1}} = 1 + \alpha \cdot \Delta\theta \Rightarrow \frac{R_{\theta_2}}{R_{\theta_1}} - 1 = \alpha \cdot \Delta\theta \Rightarrow \frac{R_{\theta_2} - R_{\theta_1}}{R_{\theta_1}} = \alpha \cdot \Delta\theta \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{R_{\theta_2} - R_{\theta_1}}{R_{\theta_1} \cdot \Delta\theta} \Rightarrow \alpha = \frac{R_{\theta_2} - R_{\theta_1}}{R_{\theta_1} \cdot \left(\theta_2 - \theta_1\right)} \Rightarrow \alpha = \frac{400\Omega - 25\Omega}{25\Omega \cdot \left(2100^o C - 20^o C\right)} \Rightarrow \alpha = 7,21 \cdot 10^{-3} \ {}^oC^{-1}$$

- ***Στα άκρα ενός πηνίου εμφανίζεται επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη 1V. Η διατομή των σπειρών του πηνίου είναι 50cm². Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου διαπερνούν κάθετα το πηνίο και η ένταση του μεταβάλλεται σύμφωνα με το σχήμα. Να υπολογιστούν οι σπείρες του πηνίου και η ένταση του μαγνητικού πεδίου, όταν αυτό διαρκεί 4s.***



Λύση

Η μεταβολή $\frac{dB}{dt}$ εκφράζει τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας. Επομένως:

$$\lambda = \frac{dB}{dt} = -\tan 45^o \Rightarrow -1 = \frac{B_2 - B_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - B_1}{4 - 0} \Rightarrow B_1 = 4T$$

Όμως η ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή δίνεται ως η αντίσταση του λαμπτήρα είναι $E = -N\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E = -N\frac{d(B \cdot S)}{dt} \overset{S:\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}}{=} -NS\frac{dB}{dt}$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$1V = -N \cdot (50 \cdot 10^{-4} m^2) \cdot (-1\frac{T}{s}) \Rightarrow N = 200 \text{ σπείρες}$$

- ***Ένα πηνίο έχει μήκος 2m, αποτελείται από 1000 σπείρες και έχει διάμετρο 8cm. Να υπολογιστεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου. Ποια η ενέργεια που αποθηκεύεται σε αυτό εάν διαρρέεται από ρεύμα 20A; Η μαγνητική διαπερατότητα του κενού είναι 4π·10⁻⁷ H/m.***

Λύση

Η μαγνητική επαγωγή εντός του πηνίου δίνεται από την σχέση:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$$

Η πεπλεγμένη ροή θα είναι:

$$\Psi = N \cdot \Phi \Rightarrow \Psi = N \cdot B \cdot S$$

Με αντικατάσταση της μαγνητικής επαγωγής στην τελευταία σχέση έχουμε:

$$\Psi = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l} \cdot S \Rightarrow \Psi = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot I}{l} \cdot S$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου θα δίνεται από την σχέση:

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$L = \frac{\Psi}{I} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot I}{l} \cdot S}{I} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l}$$

Όμως $S = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$, οπότε:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}}{l} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot l} \Rightarrow L = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot (1000)^2 \cdot \pi \cdot \left(8 \cdot 10^{-2} m\right)^2}{4 \cdot 2m} \Rightarrow$$

$$L = 3{,}16 mH$$

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 3{,}16 \cdot 10^{-3} H \cdot (10A)^2 \Rightarrow E = 0{,}158J$$

- ***Ένας πυκνωτής φέρει επίπεδους παράλληλους οπλισμούς επιφάνειας 100cm². Εάν η απόστασή του είναι 10mm και η τάση μεταξύ τους 200V, να βρεθεί η χωρητικότητα και το φορτίο του πυκνωτή. Ποια η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή; Η διηλεκτρική σταθερά του αέρα είναι 1/4·π·9·10⁹ Cb/V·m.***

Λύση

Η χωρητικότητα του πυκνωτή θα είναι:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{l} \Rightarrow C = \frac{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{Cb}{V \cdot m} \cdot 100 \cdot 10^{-4} m^2}{10 \cdot 10^{-3} m} \Rightarrow C = 8{,}84 pF$$

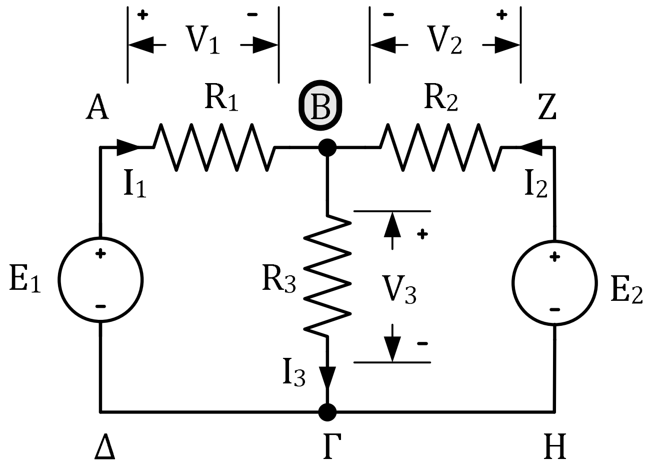
Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται από την σχέση:

$$Q = C \cdot U \Rightarrow Q = 8{,}84 \cdot 10^{-12} F \cdot 200V \Rightarrow Q = 1{,}79 nCb$$

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή υπολογίζεται ως εξής:

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 8{,}84 \cdot 10^{-12} Cb \cdot (200V)^2 \Rightarrow E = 1{,}768 \cdot 10^{-7} J$$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να καταστρωθούν οι εξισώσεις που αφορούν τον 1ο και 2ο κανόνα του Kirchhoff.***



<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε τον 1ο κανόνα του Kirchhoff στον **κόμβο Β**. Ισχύει:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

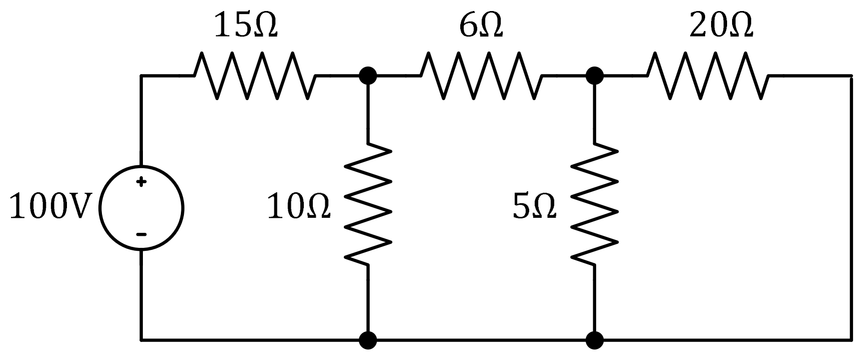
Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στον **βρόχο ΑΒΓΔΑ**. Ισχύει:

$$E_1 - V_1 - V_3 = 0 \quad ή \quad E_1 - I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 = 0$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στον **βρόχο ΖΗΓΒΗ**. Ισχύει:

$$-E_2 + V_3 + V_2 = 0 \quad ή \quad -E_2 - I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση 20Ω με διαδοχικές μετατροπές πηγών.***

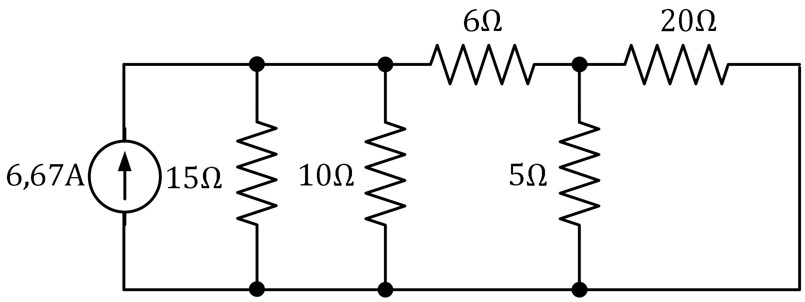


<u>Λύση</u>

Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή τάσης 100V, 15Ω σε πραγματική πηγή ρεύματος. Θα ισχύει:

$$I_1 = \frac{100V}{15\Omega} \Rightarrow I_1 = 6,67A$$

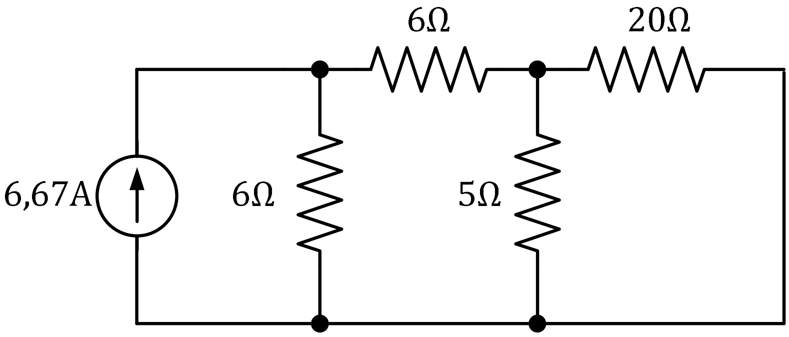
Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



Οι αντιστάσεις 15Ω και 10Ω συνδέονται παράλληλα δίνοντας μια ισοδύναμη αντίσταση:

$$R_{15,10} = \frac{15\Omega \cdot 10\Omega}{15\Omega + 10\Omega} \Rightarrow R_{15,10} = 6\Omega$$

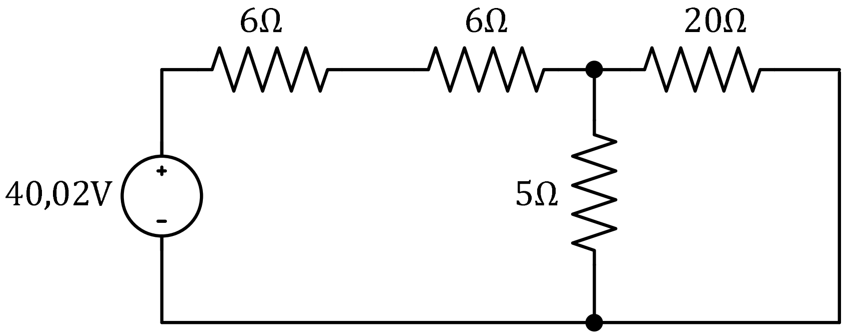
Το κύκλωμα γίνεται:



Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή ρεύματος 6,67A, 6Ω σε πραγματική πηγή τάσης. Θα ισχύει:

$$V_1 = 6,67A \cdot 6\Omega \Rightarrow V_1 = 40,02V$$

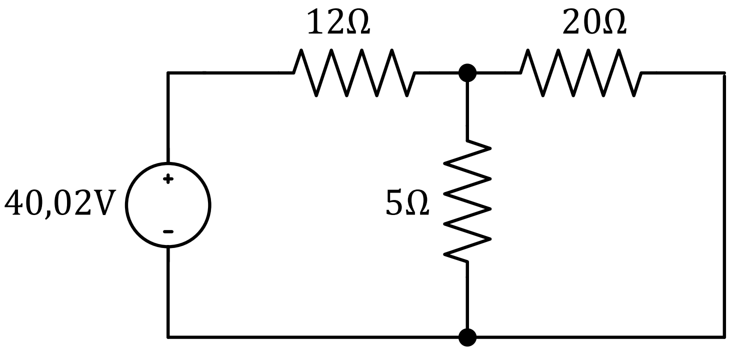
Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



Οι αντιστάσεις 6Ω και 6Ω συνδέονται σε σειρά δίνοντας μια ισοδύναμη αντίσταση:

$$R_{6,6} = 6\Omega + 6\Omega \Rightarrow R_{6,6} = 12\Omega$$

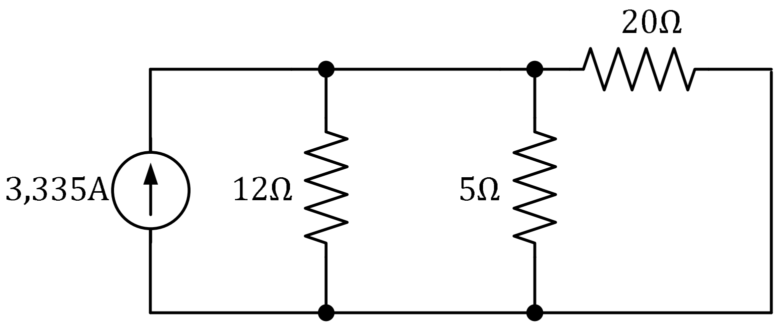
Το κύκλωμα γίνεται:



Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή τάσης 40,02V, 12Ω σε πραγματική πηγή ρεύματος. Θα ισχύει:

$$I_2 = \frac{40,02V}{12\Omega} \Rightarrow I_2 = 3,335A$$

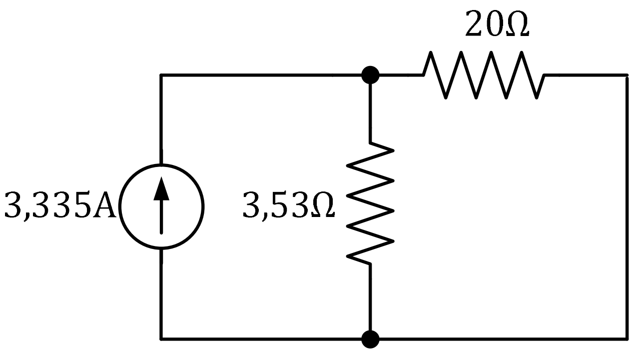
Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



Οι αντιστάσεις 12Ω και 5Ω συνδέονται παράλληλα δίνοντας μια ισοδύναμη αντίσταση:

$$R_{12,5} = \frac{12\Omega \cdot 5\Omega}{12\Omega + 5\Omega} \Rightarrow R_{12,5} = 3,53\Omega$$

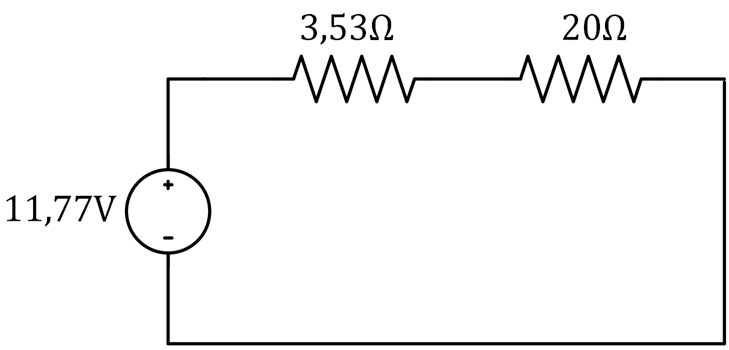
Το κύκλωμα γίνεται:



Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή ρεύματος 3,335A, 3,53Ω σε πραγματική πηγή τάσης. Θα ισχύει:

$$V_2 = 3,335A \cdot 3,53\Omega \Rightarrow V_2 = 11,77V$$

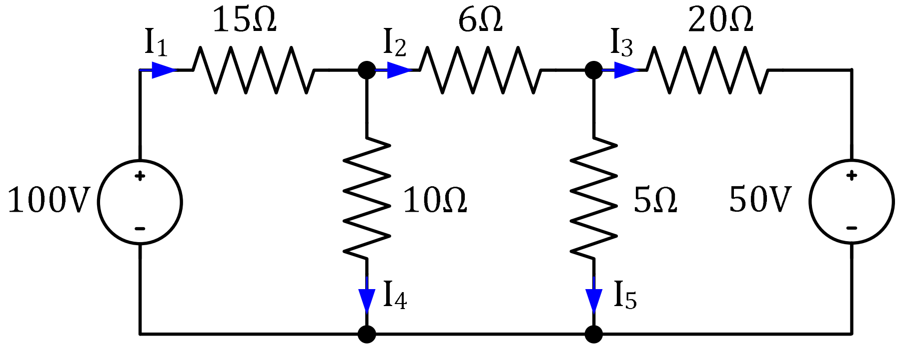
Το κύκλωμα γίνεται:



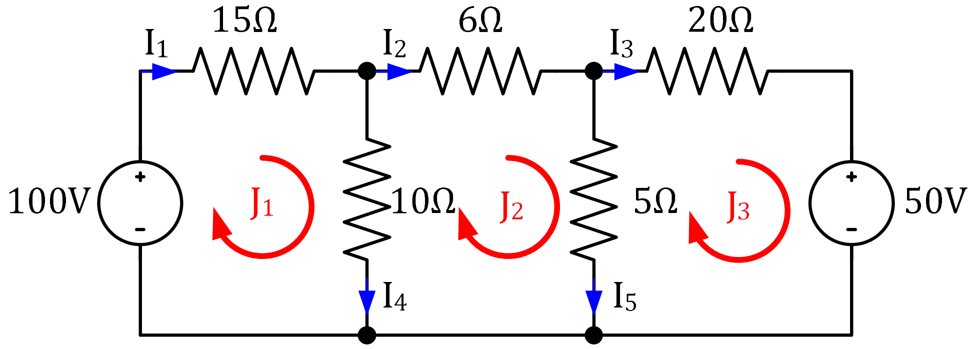
Στο τελευταίο κύκλωμα, οι αντιστάσεις 3,53Ω και 20Ω συνδέονται σε σειρά. Επομένως το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση 20Ω θα είναι:

$$I_{20\Omega} = \frac{11,77V}{3,53\Omega + 20\Omega} \Rightarrow I_{20\Omega} = 0,5A$$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις κάνοντας χρήση της μεθόδου ελαχίστων βρόχων.***



<u>Λύση</u>



Εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων βρόχων. Θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 15\Omega+10\Omega & -10\Omega & 0 \\ -10\Omega & 10\Omega+6\Omega+5\Omega & -5\Omega \\ 0 & -5\Omega & 5\Omega+20\Omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100V \\ 0 \\ -50V \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -10 & 21 & -5 \\ 0 & -5 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Τα βροχικά ρεύματα θα είναι:

$$J_1=\frac{D_1}{D}\Rightarrow J_1=\frac{\begin{vmatrix} 100 & -10 & 0 \\ 0 & 21 & -5 \\ -50 & -5 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -10 & 21 & -5 \\ 0 & -5 & 25 \end{vmatrix}}\Rightarrow J_1=\frac{100\cdot\begin{vmatrix} 21 & -5 \\ -5 & 25 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -5 & 25 \end{vmatrix}+(-50)\cdot\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 21 & -5 \end{vmatrix}}{25\cdot\begin{vmatrix} 21 & -5 \\ -5 & 25 \end{vmatrix}-(-10)\cdot\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -5 & 25 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 21 & -5 \end{vmatrix}}\Rightarrow$$

$$J_1=\frac{100\cdot\left(21\cdot 25-(-5)\cdot(-5)\right)-0\cdot\left((-10)\cdot 25-0\cdot(-5)\right)+(-50)\cdot\left((-10)\cdot(-5)-0\cdot 21\right)}{25\cdot\left(21\cdot 25-(-5)\cdot(-5)\right)-(-10)\cdot\left((-10)\cdot 25-0\cdot(-5)\right)+0\cdot\left((-10)\cdot(-5)-0\cdot 21\right)}\Rightarrow$$

$$J_1=\frac{100\cdot(525-25)-0\cdot(-250-0)+(-50)\cdot(50-0)}{25\cdot(525-25)-(-10)\cdot(-250-0)+0\cdot(50-0)}\Rightarrow$$

$$J_1=\frac{100\cdot(500)-0\cdot(-250)+(-50)\cdot(50)}{25\cdot(500)-(-10)\cdot(-250)+0\cdot(50)}\Rightarrow J_1=\frac{50000-0-2500}{12500-2500+0}\Rightarrow J_1=\frac{47500}{15000}\Rightarrow$$

$$J_1=3{,}17A$$

$$J_2=\frac{D_2}{D}\Rightarrow J_2=\frac{\begin{vmatrix}25&100&0\\-10&0&-5\\0&-50&25\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}25&-10&0\\-10&21&-5\\0&-5&25\end{vmatrix}}\Rightarrow J_2=\frac{25\cdot\begin{vmatrix}0&-5\\-50&25\end{vmatrix}-(-10)\cdot\begin{vmatrix}100&0\\-50&25\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}100&0\\0&-5\end{vmatrix}}{25\cdot\begin{vmatrix}21&-5\\-5&25\end{vmatrix}-(-10)\cdot\begin{vmatrix}-10&0\\-5&25\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-10&0\\21&-5\end{vmatrix}}\Rightarrow$$

$$J_2=\frac{25\cdot(0\cdot25-(-5)\cdot(-50))-(-10)\cdot(100\cdot25-0\cdot(-50))+0\cdot(100\cdot(-5)-0\cdot0)}{25\cdot(21\cdot25-(-5)\cdot(-5))-(-10)\cdot((-10)\cdot25-0\cdot(-5))+0\cdot((-10)\cdot(-5)-0\cdot21)}\Rightarrow$$

$$J_2=\frac{25\cdot(0-250)-(-10)\cdot(2500-0)+0\cdot(-500-0)}{25\cdot(525-25)-(-10)\cdot(-250-0)+0\cdot(50-0)}\Rightarrow$$

$$J_2=\frac{25\cdot(-250)-(-10)\cdot(2500)+0\cdot(-500)}{25\cdot(500)-(-10)\cdot(-250)+0\cdot(50)}\Rightarrow J_2=\frac{-6250+25000+0}{12500-2500+0}\Rightarrow J_2=\frac{18750}{15000}\Rightarrow$$

$$J_2=1{,}25A$$

$$J_3=\frac{D_3}{D}\Rightarrow J_3=\frac{\begin{vmatrix}25&-10&100\\-10&21&0\\0&-5&-50\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}25&-10&0\\-10&21&-5\\0&-5&25\end{vmatrix}}\Rightarrow J_3=\frac{25\cdot\begin{vmatrix}21&0\\-5&50\end{vmatrix}-(-10)\cdot\begin{vmatrix}-10&100\\-5&-50\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-10&100\\21&0\end{vmatrix}}{25\cdot\begin{vmatrix}21&-5\\-5&25\end{vmatrix}-(-10)\cdot\begin{vmatrix}-10&0\\-5&25\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-10&0\\21&-5\end{vmatrix}}\Rightarrow$$

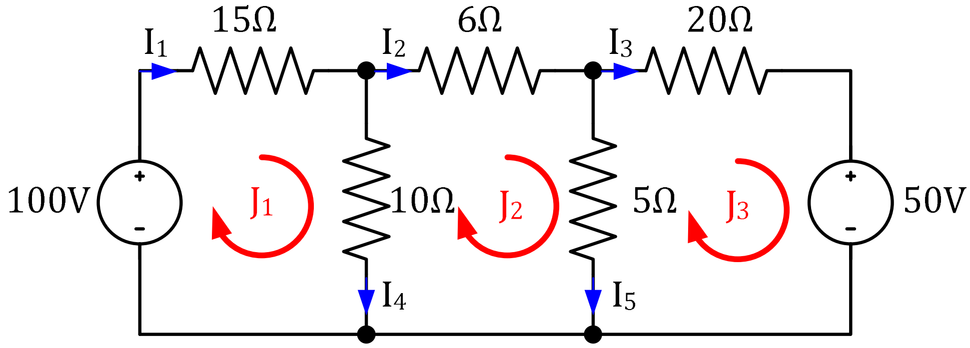
$$J_3=\frac{25\cdot(21\cdot50-(-5)\cdot0)-(-10)\cdot((-10)\cdot(-50)-100\cdot(-5))+0\cdot((-10)\cdot0-21\cdot100)}{25\cdot(21\cdot25-(-5)\cdot(-5))-(-10)\cdot((-10)\cdot25-0\cdot(-5))+0\cdot((-10)\cdot(-5)-0\cdot21)}\Rightarrow$$

$$J_3=\frac{25\cdot(1050-0)-(-10)\cdot(500+500)+0\cdot(0-2100)}{25\cdot(525-25)-(-10)\cdot(-250-0)+0\cdot(50-0)}\Rightarrow$$

$$J_3=\frac{25\cdot(1050)-(-10)\cdot(1000)+0\cdot(-2100)}{25\cdot(500)-(-10)\cdot(-250)+0\cdot(50)}\Rightarrow J_3=\frac{26250+10000+0}{12500-2500+0}\Rightarrow J_3=\frac{36250}{15000}\Rightarrow$$

$$J_3=2{,}42A$$

Επομένως τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις του κυκλώματος είναι:



$I_1 = J_1 = 3{,}17A$

$I_2 = J_2 = 1{,}25A$

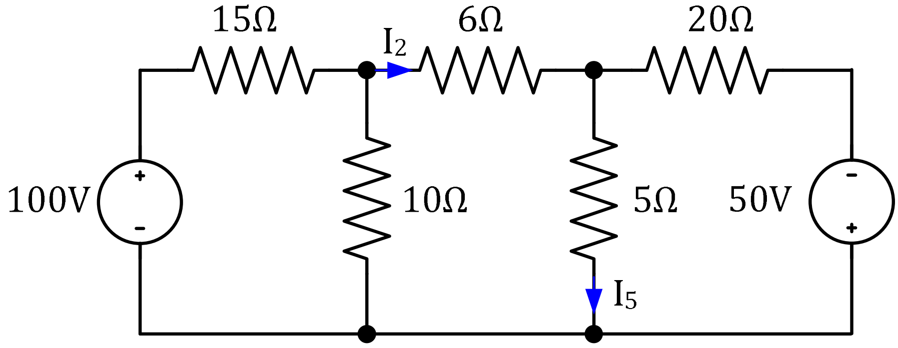
$I_3 = J_3 = 2{,}42A$

$I_4 = J_1 - J_2 = 3{,}17A - 1{,}25A \Rightarrow I_4 = 1{,}92A$

$I_5 = J_2 - J_3 = 1{,}25A - 2{,}42A \Rightarrow I_5 = -1{,}17A$

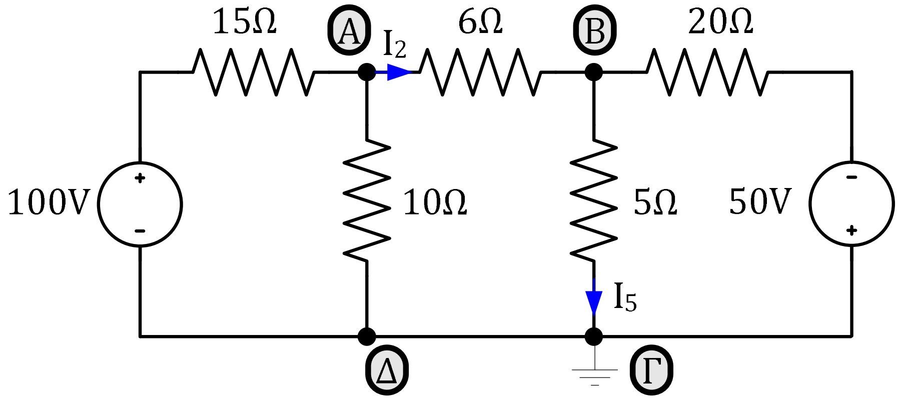
Σημειώνεται ότι **η τιμή του** ρεύματος ***I*5 είναι αρνητική**, πράγμα **που σημαίνει ότι το ρεύμα αυτό έχει αντίθετη φορά από αυτή που έχει σημειωθεί στο αρχικό κύκλωμα**.

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις 6Ω και 5Ω κάνοντας χρήση της μεθόδου των κόμβων.***



<u>Λύση</u>

Στο υπό εξέταση κύκλωμα αναγνωρίζονται τέσσερις κόμβοι, οι Α, Β, Γ και Δ. Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο, επιλέγουμε κάποιον από αυτούς ως κόμβο αναφοράς (δηλαδή, με γνωστό δυναμικό και για ευκολία ίσο με το μηδέν). Έστω ότι αυτός είναι ο κόμβος Γ. Επομένως, **ο κόμβος Γ έχει γνωστό δυναμικό το οποίο είναι ίσο με το μηδέν**. Ο κόμβος Δ συνδέεται με τον κόμβο Γ μέσω ενός αγωγού. Άρα και ο κόμβος Δ έχει γνωστό δυναμικό, το οποίο είναι ίσο με αυτό του Γ, δηλαδή μηδέν. Επομένως, ως άγνωστοι θεωρούνται τα δυναμικά των κόμβων Α και Β. Έστω V_1 και V_2 τα δυναμικά των κόμβων Α και Β, αντίστοιχα.



Εφαρμόζουμε την μέθοδο κόμβων. Θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{15\Omega}+\frac{1}{10\Omega}+\frac{1}{6\Omega} & -\frac{1}{6\Omega} \\ -\frac{1}{6\Omega} & \frac{1}{6\Omega}+\frac{1}{5\Omega}+\frac{1}{20\Omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{100V}{15\Omega} \\ \frac{50V}{20\Omega} \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0,33 & -0,17 \\ -0,17 & 0,42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6,67 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

Τα δυναμικά των κόμβων Α και Β θα είναι:

$$V_1=\frac{D_1}{D}\Rightarrow V_1=\frac{\begin{vmatrix} 6,67 & -0,17 \\ 2,5 & 0,42 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,33 & -0,17 \\ -0,17 & 0,42 \end{vmatrix}}\Rightarrow V_1=\frac{6,67\cdot 0,42-2,5\cdot(-0,17)}{0,33\cdot 0,42-\left(-0,17\right)\cdot\left(-0,17\right)}\Rightarrow$$

$$V_1=\frac{2,8014+0,425}{0,1386-0,0289}\Rightarrow V_1=\frac{3,2264}{0,1097}\Rightarrow V_1=29,41V$$

$$V_2=\frac{D_2}{D}\Rightarrow V_2=\frac{\begin{vmatrix} 0,33 & 6,67 \\ -0,17 & 2,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,33 & -0,17 \\ -0,17 & 0,42 \end{vmatrix}}\Rightarrow V_2=\frac{0,33\cdot 2,5-6,67\cdot(-0,17)}{0,33\cdot 0,42-\left(-0,17\right)\cdot\left(-0,17\right)}\Rightarrow$$

$$V_2=\frac{0,825+1,1339}{0,1386-0,0289}\Rightarrow V_2=\frac{1,9589}{0,1097}\Rightarrow V_2=17,86V$$

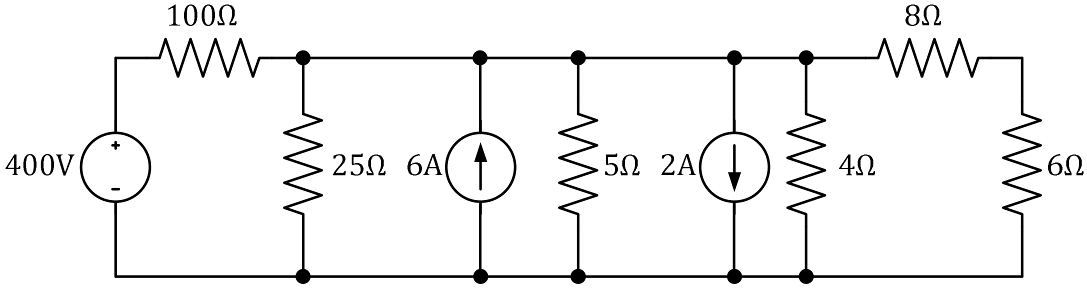
Το ρεύμα I_2 θα είναι:

$$I_2=\frac{V_1-V_2}{6\Omega}=\frac{29,41V-17,86V}{6\Omega}\Rightarrow I_2=1,925A$$

Το ρεύμα I_5 θα είναι:

$$I_5=\frac{V_2-0}{5\Omega}=\frac{17,86V-0V}{5\Omega}\Rightarrow I_5=3,572A$$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να υπολογιστεί η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση των 6Ω με την βοήθεια του θεωρήματος Millman.***



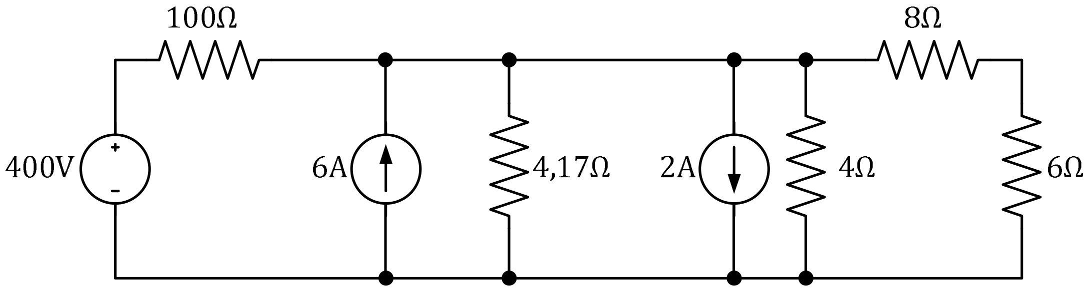
Λύση

Το θεώρημα Millman μας λέει ότι "όταν ένα κύκλωμα τροφοδοτείται από περισσότερες από μία πραγματικές πηγές τάσης, τότε αυτές μπορούν να αντικατασταθούν από μία ισοδύναμη πραγματική πηγή".

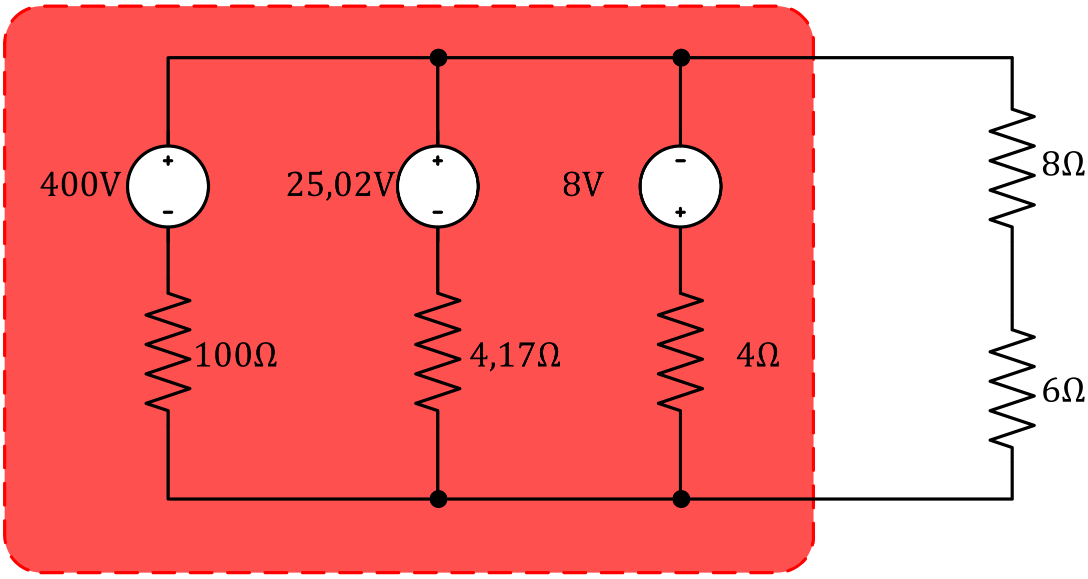
Παρατηρούμε ότι οι αντιστάσεις 25Ω και 5Ω συνδέονται παράλληλα, οπότε μπορούν να αντικατασταθούν από μία ισοδύναμη αντίσταση τιμής:

$$\frac{25\Omega \cdot 5\Omega}{25\Omega + 5\Omega} = 4{,}17\Omega$$

Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



Μετατρέπουμε τις δύο πραγματικές πηγές ρεύματος (6A/4,17Ω και 2A/4Ω) σε πραγματικές πηγές τάσης. Οι τιμές των δύο πηγών τάσης που προκύπτουν από την μετατροπή είναι 25,02V/4,17Ω και 8V/4Ω, αντίστοιχα. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο κύκλωμα:



Στο τελευταίο κύκλωμα, μετατρέπουμε τις τρεις πραγματικές πηγές τάσης σε μία ισοδύναμη, σύμφωνα με το θεώρημα Millman. Θα ισχύει:

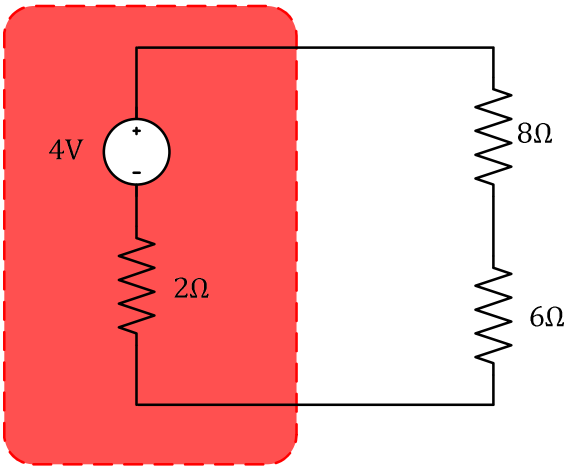
$$E = \frac{\sum_{i=1}^{3} E_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^{3} G_i} = \frac{E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow E = \frac{400V \cdot \frac{1}{100\Omega} + 25,02V \cdot \frac{1}{4,17\Omega} + (-8V) \cdot \frac{1}{4\Omega}}{\frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{4,17\Omega} + \frac{1}{4\Omega}} \Rightarrow$$

$$E = \frac{2}{0,5} \Rightarrow E = 4V$$

και

$$R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} G_i} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow R = \frac{1}{\frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{4,17\Omega} + \frac{1}{4\Omega}} \Rightarrow R = 2\Omega$$

Έτσι προκύπτει το ακόλουθο κύκλωμα:



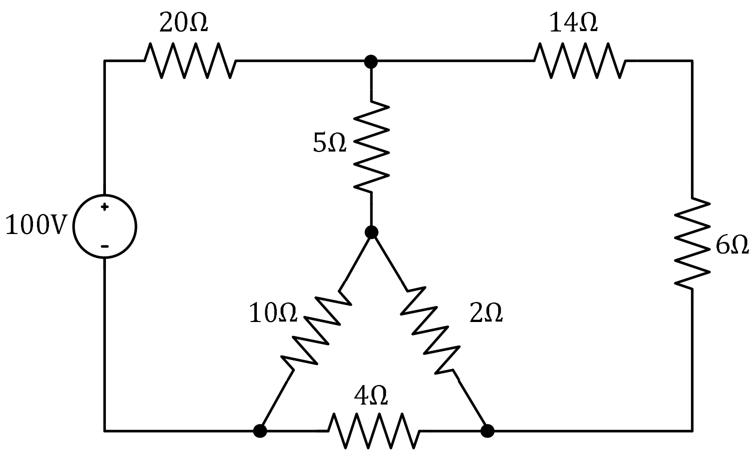
Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{4V}{2\Omega + 6\Omega + 8\Omega} \Rightarrow I = \frac{4V}{16\Omega} \Rightarrow I = 0,25A$$

Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση των 6Ω είναι:

$$P_{6\Omega} = I^2 \cdot R_{6\Omega} \Rightarrow P_{6\Omega} = 0,25^2 \cdot 6 \Rightarrow P_{6\Omega} = 0,375W$$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 6Ω κάνοντας χρήση του θεωρήματος Kennelly.***

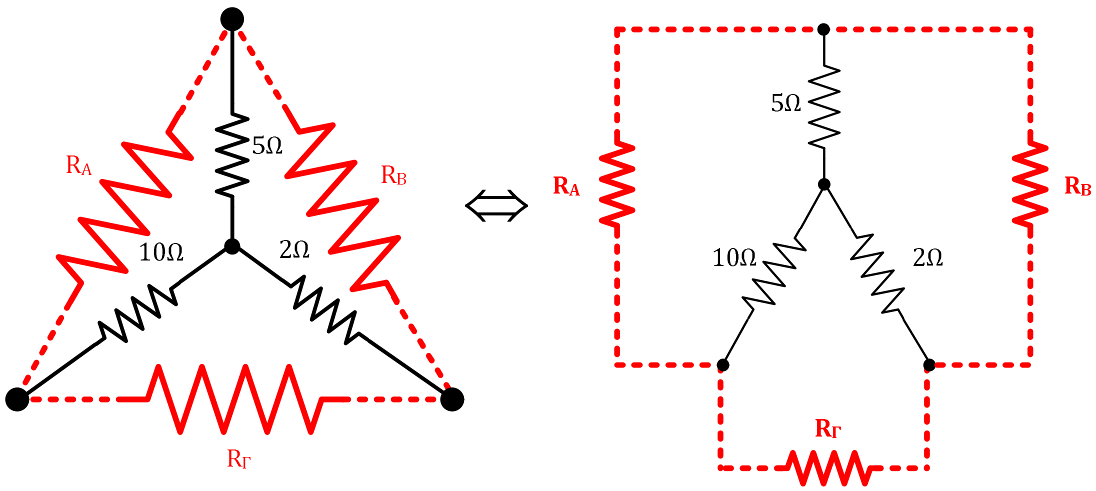


Λύση

Το θεώρημα Kennelly αναφέρεται στην μετατροπή της συνδεσμολογίας αστέρα σε τρίγωνο και αντίστροφα. Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα κάνοντας χρήση και των δύο μετασχηματισμών.

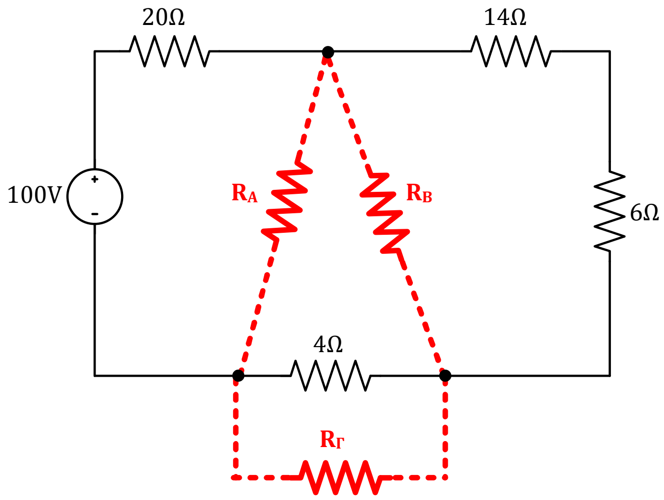
1η περίπτωση: Μετασχηματισμός αστέρα σε τρίγωνο.

Εντοπίζουμε τα άκρα μιας συνδεσμολογίας αστέρα. Επιλέγουμε τον αστέρα που περιλαμβάνει τις αντιστάσεις 2Ω, 5Ω και 10Ω. Μετατρέπουμε τον αστέρα σε τρίγωνο. Σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα, θα ισχύει:

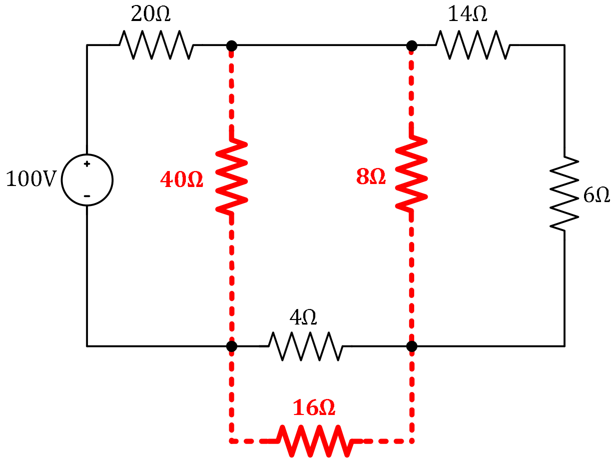


$$R_A = \frac{5\Omega \cdot 10\Omega + 10\Omega \cdot 2\Omega + 2\Omega \cdot 5\Omega}{2\Omega} \Rightarrow R_A = \frac{50+20+10}{2} \Rightarrow R_A = \frac{80}{2} \Rightarrow R_A = 40\Omega$$
$$R_B = \frac{5\Omega \cdot 10\Omega + 10\Omega \cdot 2\Omega + 2\Omega \cdot 5\Omega}{10\Omega} \Rightarrow R_B = \frac{50+20+10}{10} \Rightarrow R_B = \frac{80}{10} \Rightarrow R_B = 8\Omega$$
$$R_\Gamma = \frac{5\Omega \cdot 10\Omega + 10\Omega \cdot 2\Omega + 2\Omega \cdot 5\Omega}{5\Omega} \Rightarrow R_\Gamma = \frac{50+20+10}{5} \Rightarrow R_\Gamma = \frac{80}{5} \Rightarrow R_\Gamma = 16\Omega$$

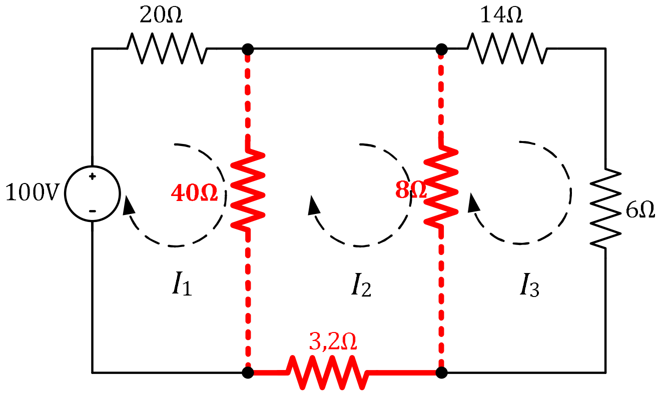
Τοποθετούμε το ισοδύναμο κύκλωμα τριγώνου στα άκρα που βρισκόταν αρχικά η συνδεσμολογία αστέρα που επιλέξαμε να μετατρέψουμε. Το κύκλωμα γίνεται:



Αναδιατάσσοντας το κύκλωμα έχουμε:



Υπολογίζουμε την ισοδύναμη αντίσταση των αντιστάσεων 4Ω και 16Ω που συνδέονται παράλληλα. Αυτή είναι: $\frac{16\Omega \cdot 4\Omega}{16\Omega + 4\Omega} = 3,2\Omega$. Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



Εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων βρόχων. Θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 20\Omega + 40\Omega & -40\Omega & 0 \\ -40\Omega & 40\Omega + 3,2\Omega + 8\Omega & -8\Omega \\ 0 & -8\Omega & 8\Omega + 14\Omega + 6\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 60 & -40 & 0 \\ -40 & 51,2 & -8 \\ 0 & -8 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το ρεύμα I_3 που είναι και το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση 6Ω:

$$I_3 = \frac{D_3}{D} \Rightarrow I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 60 & -40 & 100 \\ -40 & 51,2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 60 & -40 & 0 \\ -40 & 51,2 & -8 \\ 0 & -8 & 28 \end{vmatrix}} \Rightarrow$$

$$I_3=\frac{60\cdot\begin{vmatrix}51,2 & 0\\ -8 & 0\end{vmatrix}-(-40)\cdot\begin{vmatrix}-40 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+100\cdot\begin{vmatrix}-40 & 51,2\\ 0 & -8\end{vmatrix}}{60\cdot\begin{vmatrix}51,2 & -8\\ -8 & 28\end{vmatrix}-(-40)\cdot\begin{vmatrix}-40 & -8\\ 0 & 28\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-40 & 51,2\\ 0 & -8\end{vmatrix}}\Rightarrow$$

$$I_3=\frac{60\cdot\left(51,2\cdot 0-(-8)\cdot 0\right)-(-40)\cdot\left((-40)\cdot 0-0\cdot 0\right)+100\cdot\left((-40)\cdot(-8)-0\cdot 51,2\right)}{60\cdot\left(51,2\cdot 28-(-8)\cdot(-8)\right)-(-40)\cdot\left((-40)\cdot 28-0\cdot(-8)\right)+0\cdot\left((-40)\cdot(-8)-0\cdot 51,2\right)}\Rightarrow$$

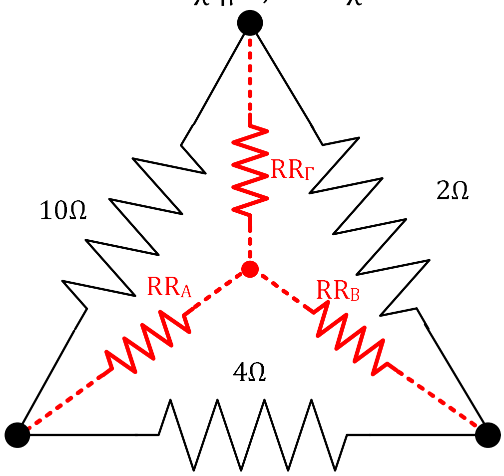
$$I_3=\frac{60\cdot(0-0)-(-40)\cdot(0-0)+100\cdot(320-0)}{60\cdot(1433,6-64)-(-40)\cdot(-1120+0)+0\cdot(320-0)}\Rightarrow$$

$$I_3=\frac{60\cdot 0+40\cdot 0+100\cdot 320}{60\cdot(1369,6)-(-40)\cdot(-1120)+0\cdot(320)}\Rightarrow I_3=\frac{0+0+32000}{82176-44800+0}\Rightarrow I_3=\frac{32000}{37376}\Rightarrow$$

$$I_3=0,86A$$

2η περίπτωση: Μετασχηματισμός τριγώνου σε αστέρα.

Εντοπίζουμε τα άκρα μιας συνδεσμολογίας τριγώνου. Επιλέγουμε το τρίγωνο που περιλαμβάνει τις αντιστάσεις 2Ω, 4Ω και 10Ω. Μετατρέπουμε το τρίγωνο σε αστέρα. Σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα, θα ισχύει:

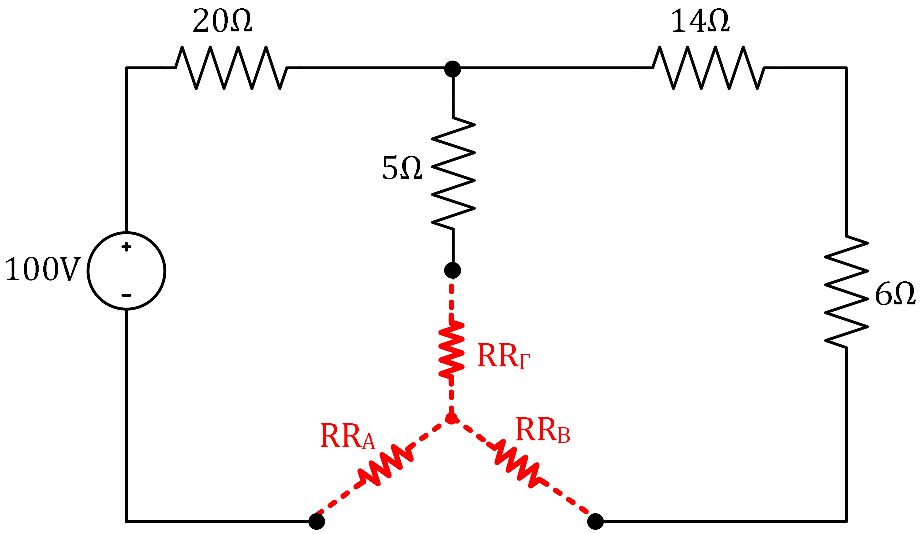


$$RR_A=\frac{10\Omega\cdot 4\Omega}{10\Omega+2\Omega+4\Omega}\Rightarrow RR_A=\frac{40}{16}\Rightarrow RR_A=2,5\Omega$$

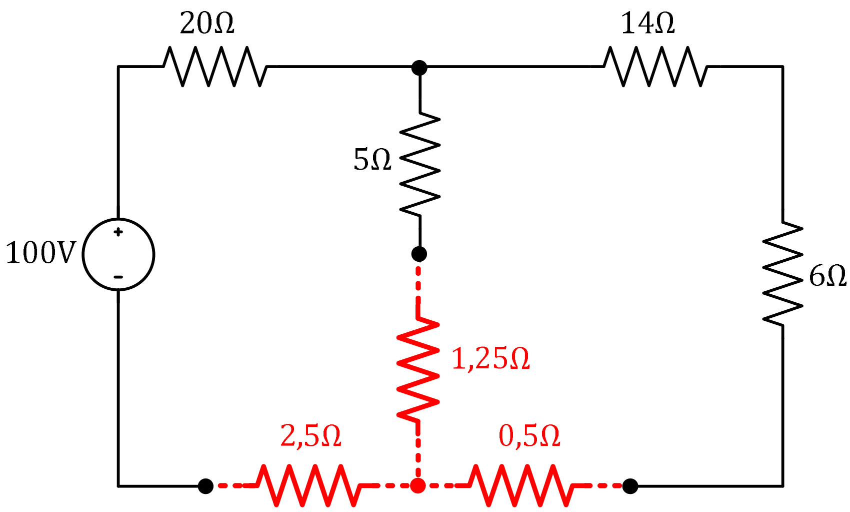
$$RR_B=\frac{4\Omega\cdot 2\Omega}{10\Omega+2\Omega+4\Omega}\Rightarrow RR_B=\frac{8}{16}\Rightarrow RR_B=0,5\Omega$$

$$RR_\Gamma=\frac{10\Omega\cdot 2\Omega}{10\Omega+2\Omega+4\Omega}\Rightarrow RR_\Gamma=\frac{20}{16}\Rightarrow RR_\Gamma=1,25\Omega$$

Τοποθετούμε το ισοδύναμο κύκλωμα αστέρα στα άκρα που βρισκόταν αρχικά η συνδεσμολογία τριγώνου που επιλέξαμε να μετατρέψουμε. Το κύκλωμα γίνεται:



Αναδιατάσσοντας το κύκλωμα έχουμε:



Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{o\lambda} = \left[(14+6+0,5)\|(1,25+5)\right]+(20+2,5) \Rightarrow R_{o\lambda} = \left[20,5\|6,25\right]+(22,5) \Rightarrow$$

$$R_{o\lambda} = \frac{20,5 \cdot 6,25}{20,5+6,25}+22,5 \Rightarrow R_{o\lambda} = 4,79+22,5 \Rightarrow R_{o\lambda} = 27,29\Omega$$

Το ρεύμα της πηγής θα είναι:

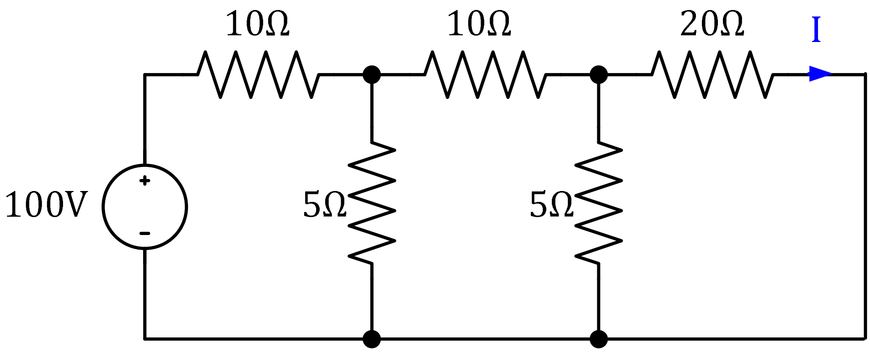
$$I = \frac{E}{R_{o\lambda}} \Rightarrow I = \frac{100V}{27,29\Omega} \Rightarrow I = 3,66A$$

Από διαιρέτη ρεύματος, το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 6Ω είναι:

$$I_{6\Omega} = I \cdot \frac{(5+1,25)}{(5+1,25)+(14+6+0,5)} \Rightarrow I_{6\Omega} = I \cdot \frac{(6,25)}{(6,25)+(20,5)} \Rightarrow I_{6\Omega} = I \cdot \frac{6,25}{26,75} \Rightarrow$$

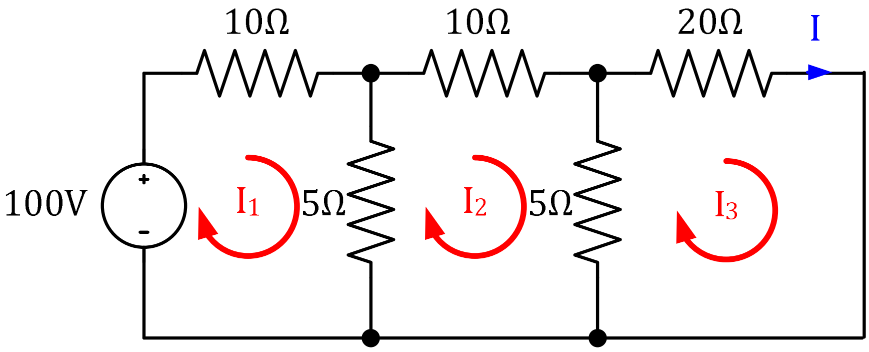
$$I_{6\Omega} = 3,66 \cdot \frac{6,25}{26,75} \Rightarrow I_{6\Omega} = 0,86A$$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, η πηγή τάσης προκαλεί ρεύμα I στον κλάδο της αντίστασης 20Ω. Να υπολογιστεί το ρεύμα αυτό και να επαληθευθεί το θεώρημα της αμοιβαιότητας.***



<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε την μέθοδο των βρόχων:



$$\begin{bmatrix} 10\Omega+5\Omega & -5\Omega & 0 \\ -5\Omega & 5\Omega+10\Omega+5\Omega & -5\Omega \\ 0 & -5\Omega & 5\Omega+20\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

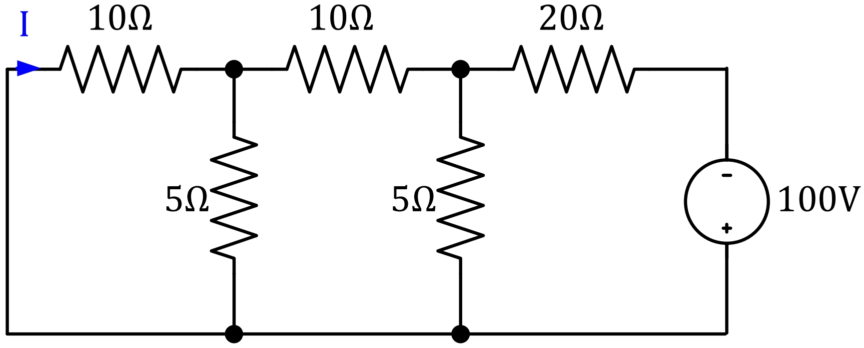
Το βροχικό ρεύμα I_3 θα είναι:

$$I_3 = \frac{D_3}{D} \Rightarrow I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -5 & 100 \\ -5 & 20 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 25 \end{vmatrix}} \Rightarrow$$

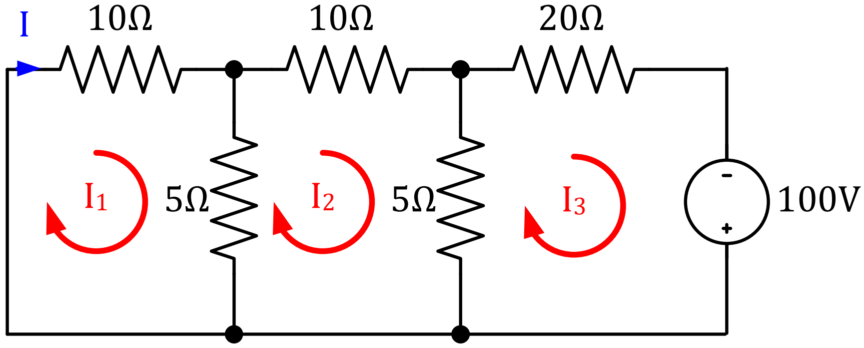
$$I_3 = \frac{100 \cdot 25}{15 \cdot (500-25) - (-5) \cdot (-125)} \Rightarrow I_3 = \frac{2500}{7125-625} \Rightarrow I_3 = \frac{2500}{6500} \Rightarrow I_3 = 0{,}38A$$

Άρα: $I = I_3 = 0{,}38A$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα της αμοιβαιότητας εναλλάσσοντας, αμοιβαία, την θέση της πηγής με το ρεύμα I. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο κύκλωμα:



Εφαρμόζουμε την μέθοδο των βρόχων:



$$\begin{bmatrix} 10\Omega+5\Omega & -5\Omega & 0 \\ -5\Omega & 5\Omega+10\Omega+5\Omega & -5\Omega \\ 0 & -5\Omega & 5\Omega+20\Omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100V \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

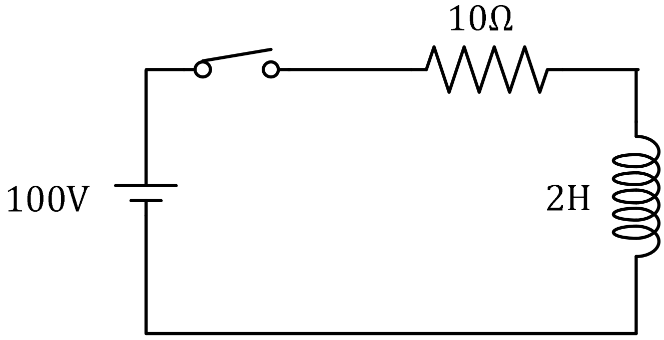
Το βροχικό ρεύμα I_1 θα είναι:

$$I_1=\frac{D_1}{D}\Rightarrow I_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & 20 & -5 \\ 100 & -5 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 25 \end{vmatrix}}\Rightarrow$$

$$I_1=\frac{100\cdot 25}{15\cdot(500-25)-(-5)\cdot(-125)}\Rightarrow I_1=\frac{2500}{7125-625}\Rightarrow I_1=\frac{2500}{6500}\Rightarrow I_1=0{,}38A$$

Άρα: $I=I_1=0{,}38A$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να καταστρωθεί η εξίσωση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο κατά το κλείσιμο του διακόπτη. Ποια η τάση στα δύο στοιχεία τις χρονικές στιγμές t=0 και t=∞? Ποια η σταθερά χρόνου του κυκλώματος?***



<u>Λύση</u>

Κλείνοντας τον διακόπτη, από τον 2ο κανόνα του Kirchhoff θα έχουμε:

$$E = u_R + u_L \Rightarrow E = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση:

$$i(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{E}{R}$$

Όμως την χρονική στιγμή $t = 0s$, το ρεύμα θα είναι $i(0) = 0A$. Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση θα έχουμε:

$$i(0) = 0 = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} + \frac{E}{R} \Rightarrow 0 = C \cdot e^{0} + \frac{E}{R} \Rightarrow 0 = C + \frac{E}{R} \Rightarrow C = -\frac{E}{R}$$

Επομένως η εξίσωση του ρεύματος είναι:

$$i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

Για $t = 0s$:

$$u_R(0) = R \cdot i(0) \Rightarrow u_R(0) = 0V$$

$$u_L(0) = E - u_R(0) \Rightarrow u_L(0) = 100 - 0 \Rightarrow u_L(0) = 100V$$

Για $t = \infty$:

Σε αυτή την περίπτωση το πηνίο συμπεριφέρεται σαν βραχυκύκλωμα, οπότε $i(\infty) = \frac{100}{10} = 10A$.

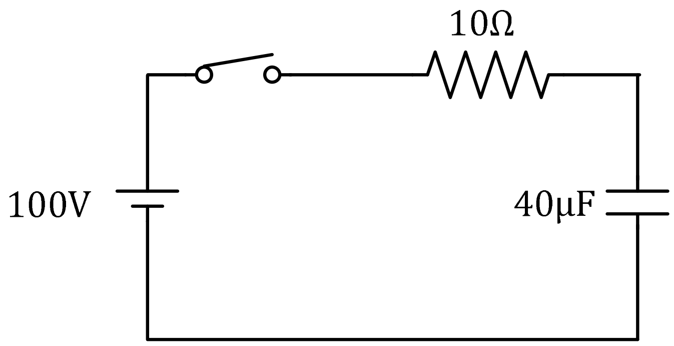
$$u_R(\infty) = R \cdot i(\infty) \Rightarrow u_R(\infty) = 10 \cdot 10 \Rightarrow u_R(\infty) = 100V$$

$$u_L(\infty) = E - u_R(\infty) \Rightarrow u_L(\infty) = 100 - 100 \Rightarrow u_L(\infty) = 0V$$

Η σταθερά χρόνου είναι:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2H}{10\Omega} \Rightarrow \tau = 0,2s$$

- ***Στο ακόλουθο κύκλωμα, να καταστρωθεί η εξίσωση του ρεύματος που διαρρέει τον πυκνωτή κατά το κλείσιμο του διακόπτη. Ποια η τάση στα δύο στοιχεία τις χρονικές στιγμές t=0 και t=∞? Ποια η σταθερά χρόνου του κυκλώματος?***



<u>Λύση</u>

Κλείνοντας τον διακόπτη, από τον 2ο κανόνα του Kirchhoff θα έχουμε:

$$E = u_R + u_C \Rightarrow E = i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση προκύπτει:

$$0 = \frac{di}{dt} \cdot R + \frac{i}{C} \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{dt}{R \cdot C} \Rightarrow \int_{i(0)}^{i} \frac{di}{i} = -\int_{0}^{t} \frac{dt}{R \cdot C} \Rightarrow i(t) = i(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Όμως την χρονική στιγμή $t = 0s$, η τάση του πυκνωτή θα είναι $u_C(0) = 0V$. Οπότε $i(0) = \frac{E}{R}$. Επομένως η εξίσωση του ρεύματος είναι:

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Για $t = 0s$:

$$u_R(0) = R \cdot i(0) \Rightarrow u_R(0) = E \Rightarrow u_R(0) = 100V$$

$$u_C(0) = E - u_R(0) \Rightarrow u_C(0) = 100 - 100 \Rightarrow u_C(0) = 0V$$

Για $t = \infty$:

Σε αυτή την περίπτωση ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν ανοικτοκύκλωμα, οπότε $i(\infty) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{\infty}{R \cdot C}} \Rightarrow i(\infty) = 0A$.

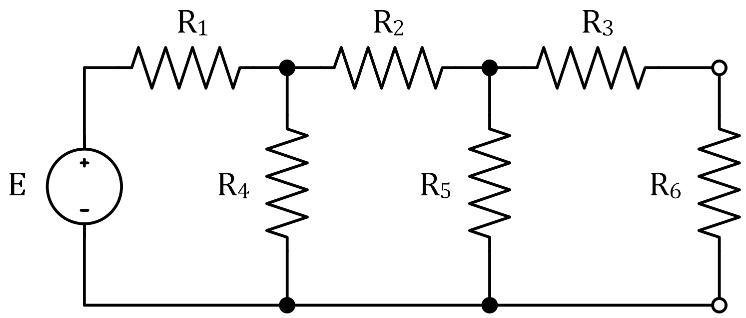
$$u_R(\infty) = R \cdot i(\infty) \Rightarrow u_R(\infty) = 10 \cdot 0 \Rightarrow u_R(\infty) = 0V$$

$$u_L(\infty) = E - u_R(\infty) \Rightarrow u_L(\infty) = 100 - 0 \Rightarrow u_L(\infty) = 100V$$

Η σταθερά χρόνου είναι:

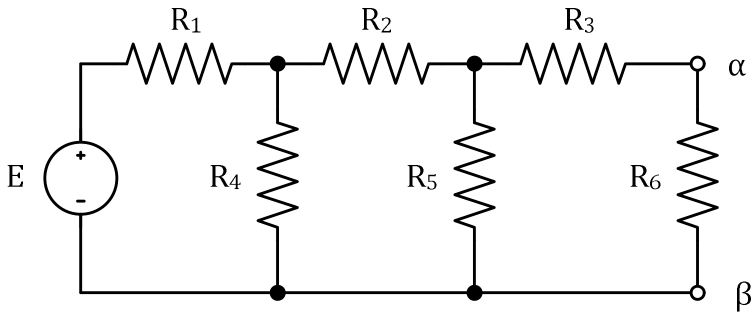
$$\tau = R \cdot C = 10\Omega \cdot 40 \cdot 10^{-6} F \Rightarrow \tau = 0,4ms$$

- ***Να βρεθεί το ρεύμα και η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_6 με την βοήθεια του θεωρήματος Thevenin.***

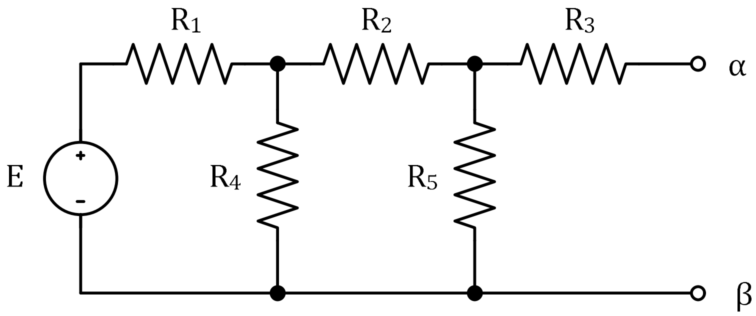


<u>Λύση</u>

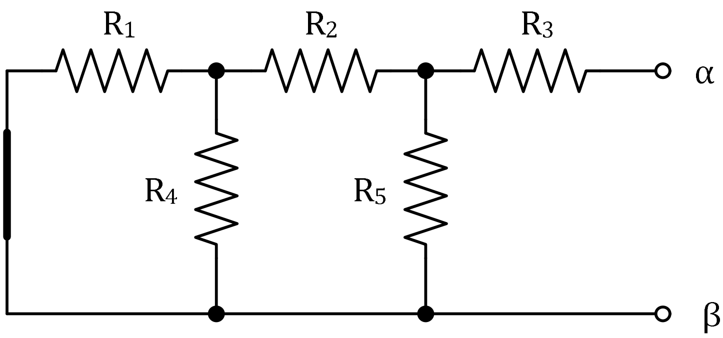
Εντοπίζουμε το φορτίο, το οποίο είναι η αντίσταση R_6.



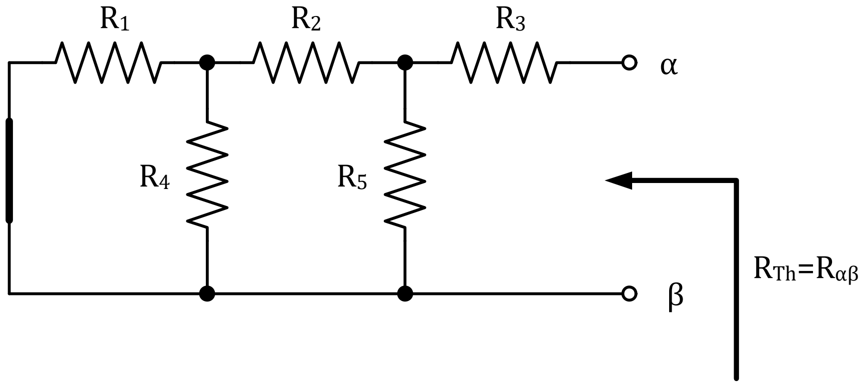
Απομακρύνουμε το φορτίο από το κύκλωμα.



Μηδενίζουμε όλες τις πηγές του κυκλώματος μας. Παρατηρούμε ότι έχουμε μόνο μία πηγή, η οποία είναι πηγή τάσης. Η πηγή αυτή μηδενίζεται, βραχυκυκλώνοντας την.

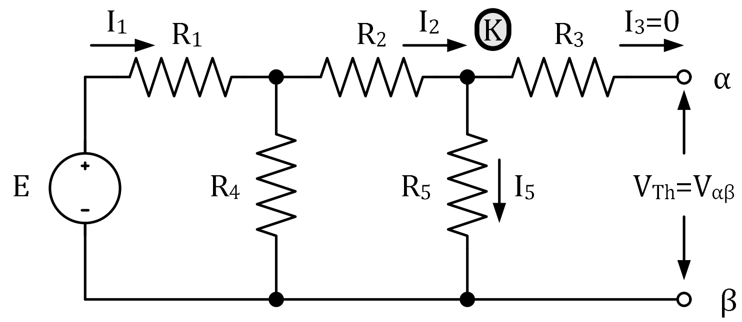


Υπολογίζουμε την αντίσταση Thevenin στα ελεύθερα άκρα α και β.



Η αντίσταση Thevenin θα είναι: $R_{Th} = R_{\alpha\beta} = \left\{ \left[\left(R_1 \| R_4 \right) + R_2 \right] \| R_5 \right\} + R_3$

Επαναφέρουμε τις πηγές και υπολογίζουμε την τάση Thevenin στα ελεύθερα άκρα α, β. Στην περίπτωση μας, επαναφέρουμε την πηγή τάσης του κυκλώματος.



Για τον υπολογισμό της τάσης V_{ab} ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία (ενδεικτικός τρόπος υπολογισμού).

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η αντίσταση R_3 δεν διαρρέεται από ρεύμα αφού τα άκρα α και β είναι ελεύθερα. Έτσι:

$$I_3 = 0$$

Επίσης, από τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο K, θα ισχύει:

$$I_2 = I_3 + I_5 \Rightarrow I_2 = I_5$$

Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι οι αντιστάσεις R_2 και R_5 συνδέονται σε σειρά.

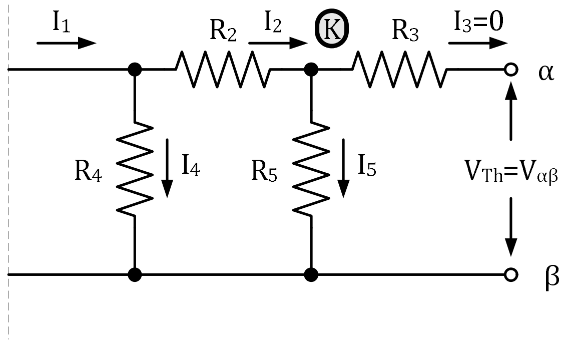
Επομένως, η συνολική αντίσταση του τελευταίου κυκλώματος είναι:

$$R_{o\lambda} = R_1 + \left[\left(R_2 + R_5 \right) \| R_4 \right]$$

Το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος, που είναι το ρεύμα της πηγής τάσης, θα είναι ίσο με το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_1:

$$I_{o\lambda} = I_1 = \frac{E}{R_{o\lambda}}$$

Κάνοντας χρήση του διαιρέτη ρεύματος, υπολογίζουμε το ρεύμα I_5 που διαρρέει την αντίσταση R_5. Συγκεκριμένα:



$$\frac{I_5}{I_1}=\frac{\dfrac{R_4\left(R_2+R_5\right)}{R_4+\left(R_2+R_5\right)}}{\left(R_2+R_5\right)}\Rightarrow I_5=I_2=I_1\frac{\left(R_2+R_5\right)R_4}{\left(R_2+R_5\right)\left[R_4+\left(R_2+R_5\right)\right]}\Rightarrow I_5=I_2=I_1\frac{R_4}{\left[R_4+\left(R_2+R_5\right)\right]}$$

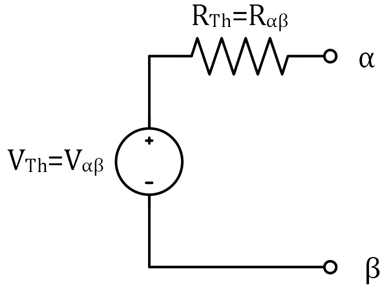
Η τάση στα άκρα της αντίστασης R_5 θα είναι:

$$V_5=I_5R_5$$

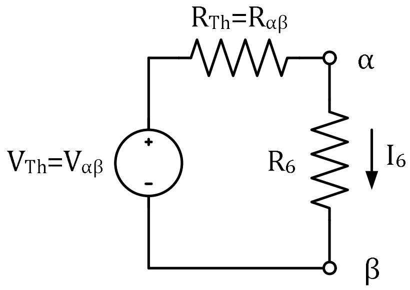
Επειδή ισχύει $I_3=0$, θα ισχύει επίσης ότι:

$$-V_{Th}+V_5=0\Rightarrow V_{Th}=V_5$$

Σχεδιάζουμε το ***ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin***:



Επαναφέρουμε στα ελεύθερα άκρα α και β του ισοδυνάμου Thevenin, την αντίσταση R_6 που είχαμε αρχικά απομακρύνει.



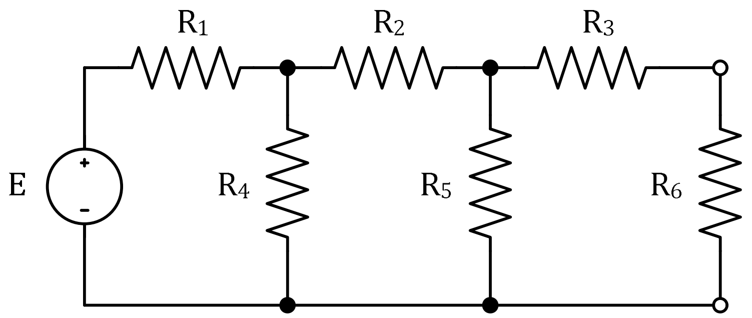
Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_6 (ενδεικτική λύση), υπολογίζεται από την σχέση:

$$I_6=\frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_6}$$

Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_6, θα είναι:

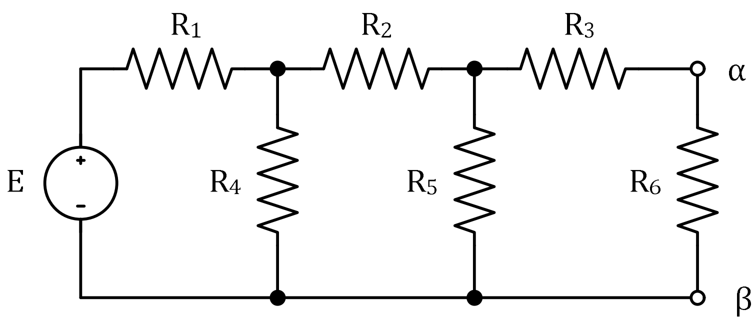
$$P_6=I_6^2R_6$$

- ***Να βρεθεί το ρεύμα και η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_6 με την βοήθεια του θεωρήματος Norton.***

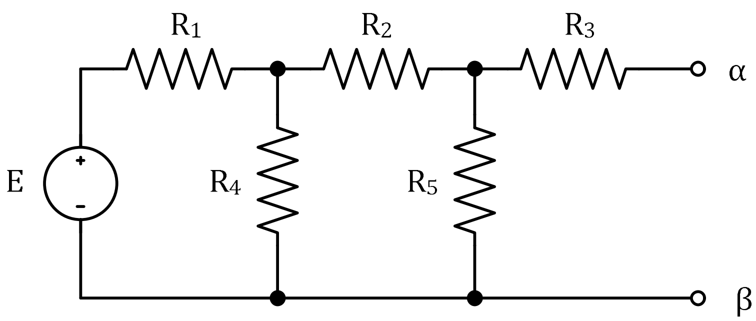


<u>Λύση</u>

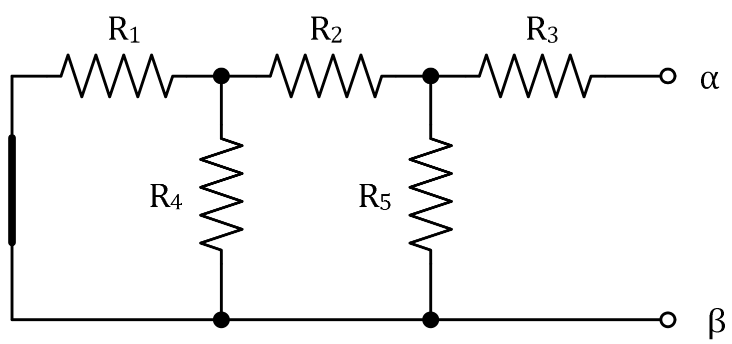
Εντοπίζουμε το φορτίο, το οποίο είναι η αντίσταση R_6.



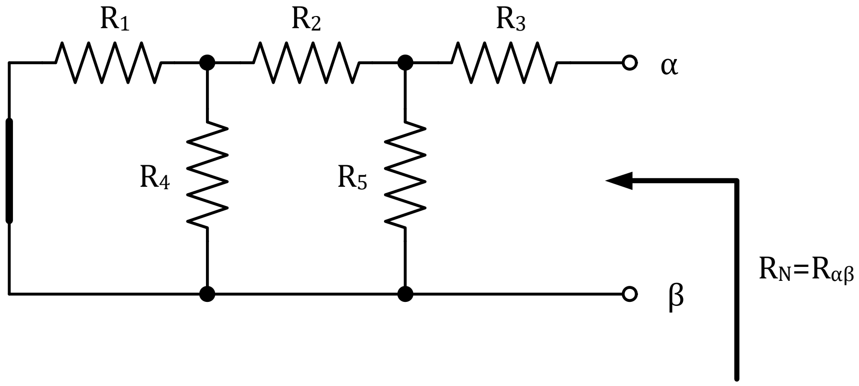
Απομακρύνουμε το φορτίο από το κύκλωμα.



Μηδενίζουμε όλες τις πηγές του κυκλώματος μας. Παρατηρούμε ότι έχουμε μόνο μία πηγή, η οποία είναι πηγή τάσης. Η πηγή αυτή μηδενίζεται, βραχυκυκλώνοντας την.

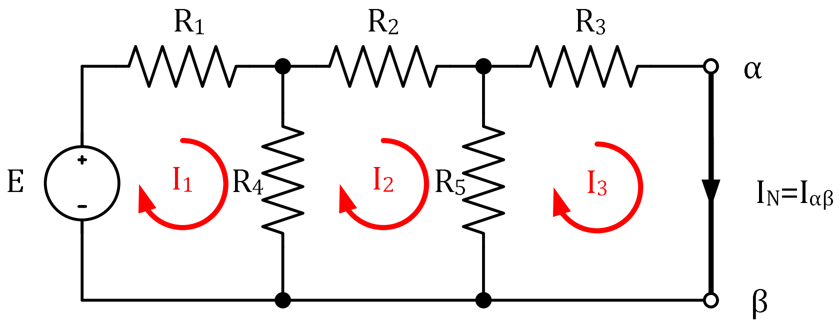


Υπολογίζουμε την αντίσταση Norton στα ελεύθερα άκρα α και β.



Η αντίσταση Norton θα είναι: $R_N = R_{\alpha\beta} = \left\{ \left[\left(R_1 \| R_4 \right) + R_2 \right] \| R_5 \right\} + R_3$

Επαναφέρουμε τις πηγές και βραχυκυκλώνουμε τα ελεύθερα άκρα α και β. Στην περίπτωση μας, επαναφέρουμε την πηγή τάσης του κυκλώματος. Υπολογίζουμε το ρεύμα Norton που διαρρέει το βραχυκύκλωμα (η λύση είναι ενδεικτική).



Εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων βρόχων. Θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_2+R_4+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_3+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το βροχικό ρεύμα I_3 θα είναι:

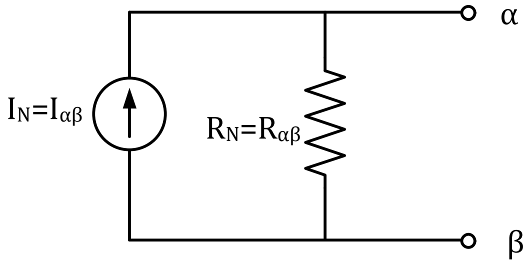
$$I_3 = \frac{D_3}{D} \Rightarrow I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_4 & -R_4 & E \\ -R_4 & R_2+R_4+R_5 & 0 \\ 0 & -R_5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_2+R_4+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_3+R_5 \end{vmatrix}} \Rightarrow$$

$$I_3 = \frac{E\left(R_4 R_5\right)}{\left(R_1+R_4\right)\left[\left(R_2+R_4+R_5\right)\left(R_3+R_5\right)-\left(R_5 R_5\right)\right]-\left(-R_4\right)\left[\left(-R_4\right)\left(R_3+R_5\right)\right]}$$

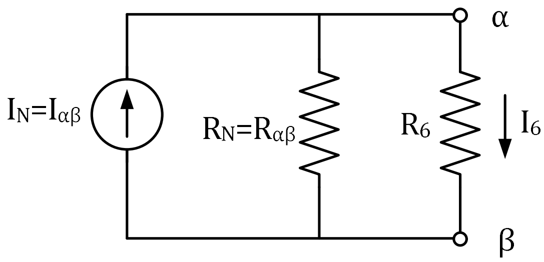
Από το τελευταίο σχήμα βλέπουμε ότι για το ρεύμα Norton, I_N, θα ισχύει:

$$I_N = I_{\alpha\beta} = I_3$$

Σχεδιάζουμε το ***ισοδύναμο κύκλωμα Norton***:



Επαναφέρουμε στα ελεύθερα άκρα α και β του ισοδυνάμου Norton, την αντίσταση R_6 που είχαμε αρχικά απομακρύνει.



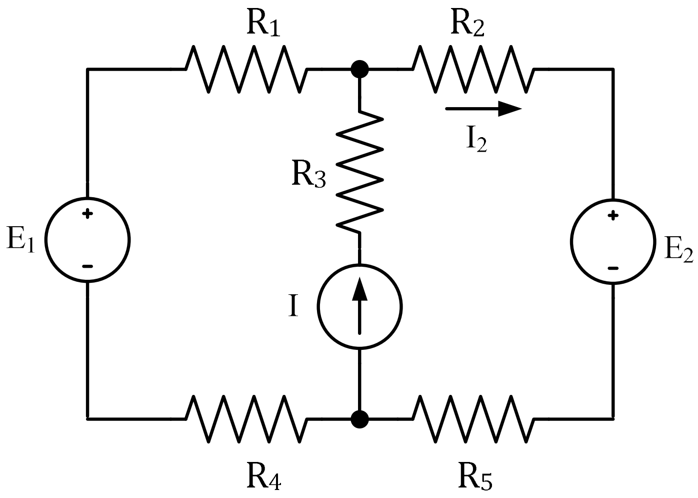
Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_6 (ενδεικτική λύση), υπολογίζεται, μέσω διαιρέτη ρεύματος, από την σχέση:

$$\frac{I_6}{I_N} = \frac{\dfrac{R_N R_6}{R_N + R_6}}{R_6} \Rightarrow I_6 = I_N \frac{R_N R_6}{R_6\left(R_N + R_6\right)} \Rightarrow I_6 = I_N \frac{R_N}{R_N + R_6}$$

Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_6, θα είναι:

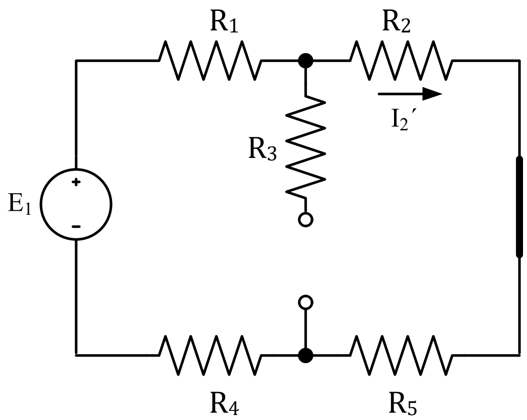
$$P_6 = I_6^2 R_6$$

- ***Να υπολογιστεί η τιμή του ρεύματος I2 με χρήση του θεωρήματος της επαλληλίας.***



<u>Λύση</u>

Μηδενίζουμε, αρχικά, τις πηγές I και E2. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



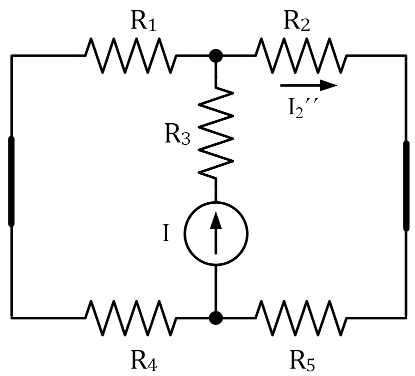
Στο παραπάνω κύκλωμα, η αντίσταση R_3 δεν διαρρέεται από ρεύμα. Έτσι το ρεύμα I_2' είναι ίσο με το ρεύμα της πηγής E_1. Για τον υπολογισμό του, εφαρμόζουμε καταμεριστή τάσης:

$$\frac{V_2'}{E_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} \Rightarrow V_2' = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}$$

και από τον νόμο του Ohm:

$$I_2' = \frac{V_2'}{R_2}$$

Στη συνέχεια, μηδενίζουμε τις πηγές E_1 και E_2. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:

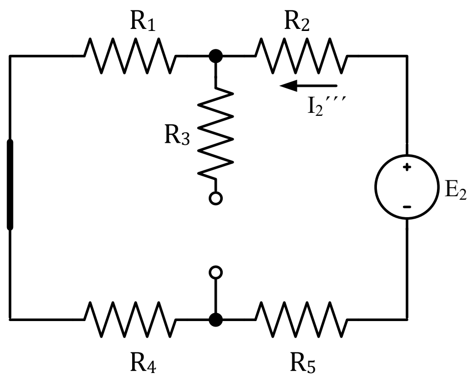


Στο παραπάνω κύκλωμα, η αντίσταση R3 διαρρέεται από το ρεύμα της πηγής ρεύματος. Επίσης, οι αντιστάσεις R1 και R4 συνδέονται σε σειρά. Το ίδιο ισχύει και για τις αντιστάσεις R2 και R5. Το ρεύμα I2´´ υπολογίζεται μέσω διαιρέτη ρεύματος:

$$\frac{I_2''}{I} = \frac{\dfrac{(R_2+R_5)(R_1+R_4)}{(R_2+R_5)+(R_1+R_4)}}{(R_2+R_5)} \Rightarrow I_2'' = I\frac{(R_2+R_5)(R_1+R_4)}{(R_2+R_5)\left[(R_2+R_5)+(R_1+R_4)\right]} \Rightarrow$$

$$I_2'' = I\frac{(R_1+R_4)}{\left[(R_2+R_5)+(R_1+R_4)\right]}$$

Τέλος, μηδενίζουμε τις πηγές I και E1. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



Στο παραπάνω κύκλωμα, η αντίσταση R3 δεν διαρρέεται από ρεύμα. Έτσι το ρεύμα I2´´´ είναι ίσο με το ρεύμα της πηγής E2. Για τον υπολογισμό του, εφαρμόζουμε καταμεριστή τάσης:

$$\frac{V_2'''}{E_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2+R_4+R_5} \Rightarrow V_2''' = E_2\frac{R_2}{R_1+R_2+R_4+R_5}$$

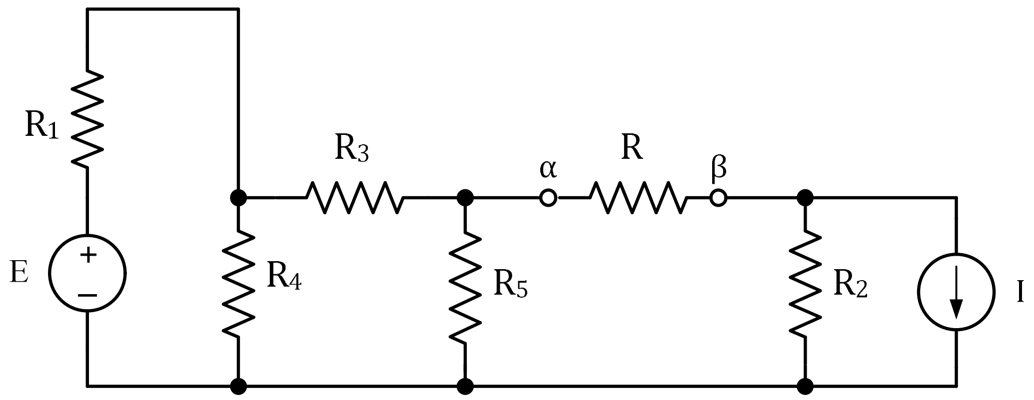
και από τον νόμο του Ohm:

$$I_2''' = \frac{V_2'''}{R_2}$$

Επομένως η τιμή του ρεύματος I2 υπολογίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους τριών κυκλωμάτων και θα είναι:

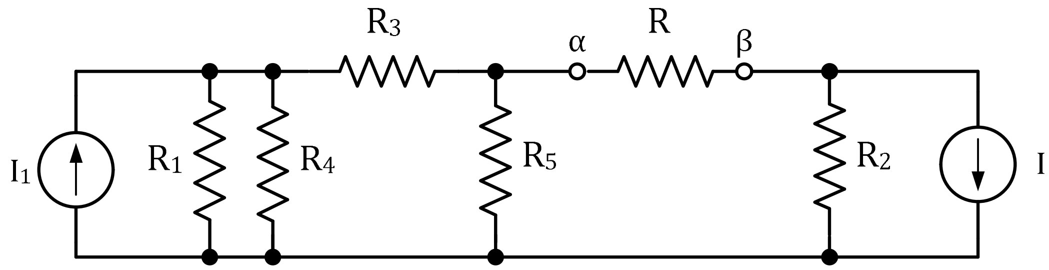
$$I_2 = I_2' + I_2'' - I_2'''$$

- ***Να υπολογιστεί η τιμή της αντίστασης R ώστε να έχουμε μέγιστη μεταφορά ισχύος. Ποια η τιμή της μέγιστης ισχύος που καταναλώνεται σε αυτή;***

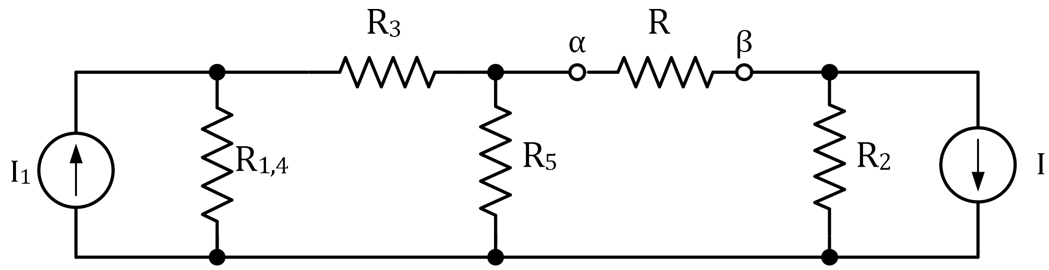


<u>Λύση (Ενδεικτική)</u>

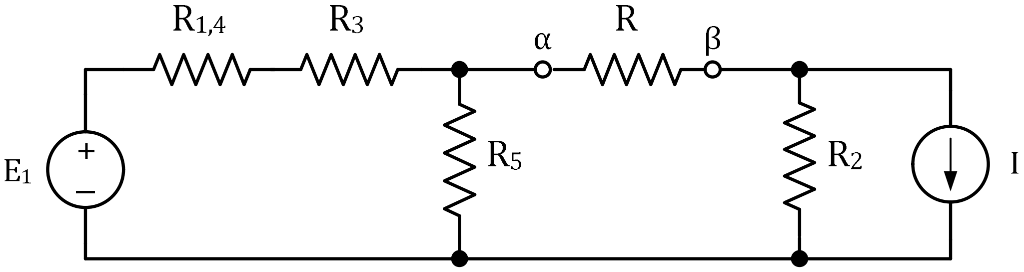
Εφαρμόζουμε διαδοχικές μετατροπές πηγών. Μετατρέπουμε την πηγή τάσης E σε πηγή ρεύματος. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο κύκλωμα:



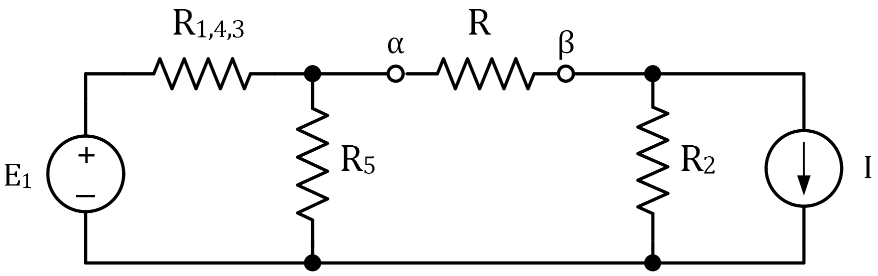
όπου $I_1 = \frac{E}{R_1}$. Οι αντιστάσεις R_1 και R_4 συνδέονται παράλληλα. Η ισοδύναμη αντίσταση τους θα είναι $R_{1,4} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}$. Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



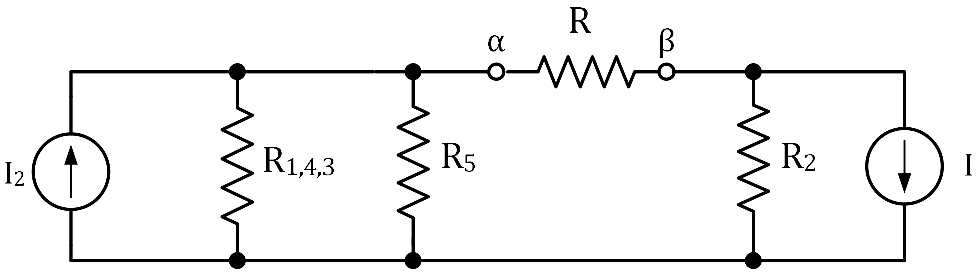
Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή ρεύματος με τιμές I_1 και $R_{1,4}$ σε πραγματική πηγή τάσης:



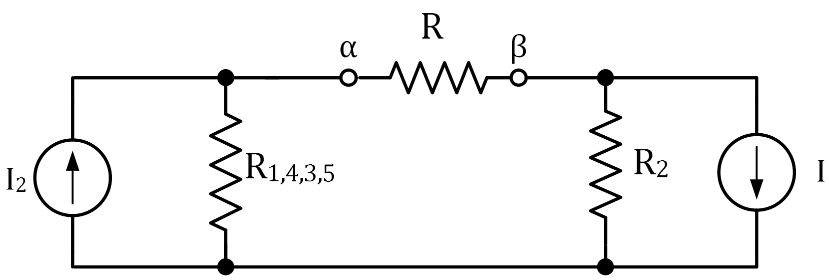
όπου $E_1 = I_1 R_{1,4}$. Οι αντιστάσεις $R_{1,4}$ και R_3 συνδέονται σε σειρά. Η ισοδύναμη αντίσταση τους θα είναι $R_{1,4,3} = R_{1,4} + R_3$. Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



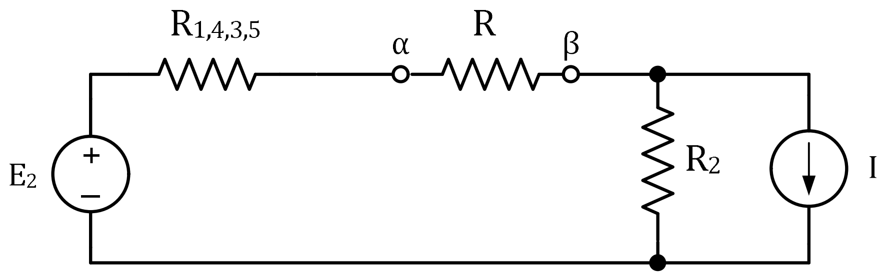
Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή τάσης με τιμές E_1 και $R_{1,4,3}$ σε πραγματική πηγή ρεύματος:



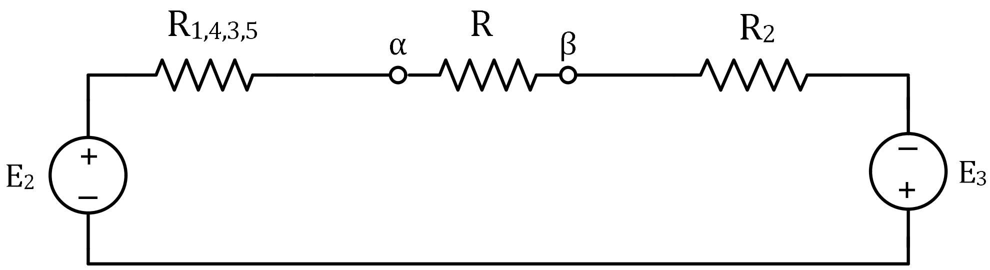
όπου $I_2 = \dfrac{E_1}{R_{1,4,3}}$. Οι αντιστάσεις $R_{1,4,3}$ και R_5 συνδέονται παράλληλα. Η ισοδύναμη αντίσταση τους θα είναι $R_{1,4,3,5} = \dfrac{R_{1,4,3} R_5}{R_{1,4,3} + R_5}$. Έτσι το κύκλωμα γίνεται:



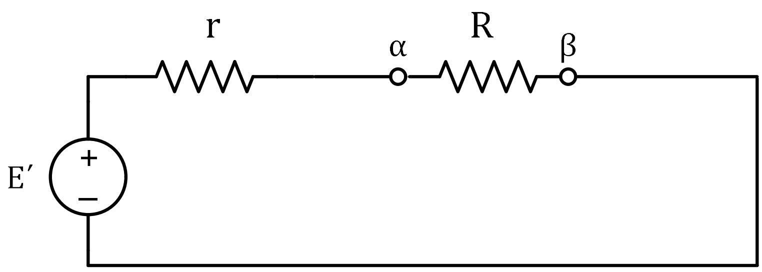
Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή ρεύματος με τιμές I_2 και $R_{1,4,3,5}$ σε πραγματική πηγή τάσης:



όπου $E_2 = I_2 R_{1,4,3,5}$. Μετατρέπουμε την πραγματική πηγή ρεύματος με τιμές I και R2 σε πραγματική πηγή τάσης:



όπου $E_3 = IR_2$. Οι πηγές E2 και E3 συνδέονται σε σειρά. Ομοίως, οι αντιστάσεις R1,4,3,5 και R2 συνδέονται σε σειρά. Έτσι, το τελευταίο κύκλωμα γίνεται:



όπου $E' = E_2 + E_3$ και $r = R_{1,4,3,5} + R_2$. Στο κύκλωμα αυτό, το ρεύμα I′ της πηγής θα είναι:

$$I' = \frac{E'}{R + r}$$

Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R θα είναι:

$$P = I'^2 R = \left(\frac{E'}{R + r}\right)^2 R$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση της ισχύος με την άγνωστη αντίσταση R. Έτσι:

$$P(R) = E'^2 \frac{R}{(R + r)^2}$$

Η τιμή της R για την οποία έχουμε την μέγιστη καταναλισκόμενη ισχύ σ' αυτή, αναζητείται στις ρίζες της πρώτης παραγώγου της συναρτήσεως P(R), δηλαδή:

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0 \Rightarrow \mathrm{E}'^2 \frac{(\mathrm{R}+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} = 0 \Rightarrow \mathrm{E}'^2 \frac{(R+r) - 2R}{(R+r)^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}'^2 \frac{r - R}{(R+r)^3} = 0 \Rightarrow r - R = 0 \Rightarrow$$

$$R = r$$

Στη συνέχεια ελέγχουμε εάν το ακρότατο που υπολογίσαμε, αντιστοιχεί σε μέγιστο ή ελάχιστο. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση της ισχύος για δεύτερη φορά:

$$\frac{d^2P(R)}{dR^2}=\mathrm{E}'^2\,\frac{-(R+r)^3-3(r-R)(R+r)^2}{(R+r)^6}=\mathrm{E}'^2\,\frac{-(R+r)-3(r-R)}{(R+r)^4}\Rightarrow$$

$$\frac{d^2P(R)}{dR^2}=\mathrm{E}'^2\,\frac{2R-4r}{(R+r)^4}$$

Για $R=r$ έχουμε: $\left.\dfrac{d^2P(R)}{dR^2}\right|_{R=r}=\mathrm{E}'^2\,\dfrac{2r-4r}{(r+r)^4}=\mathrm{E}'^2\,\dfrac{-2r}{(2r)^4}=\mathrm{E}'^2\,\dfrac{-2r}{16r^4}=\mathrm{E}'^2\,\dfrac{-1}{8r^3}<0$

Άρα το ακρότατο είναι **μέγιστο** και η τιμή της μέγιστης ισχύος δίνεται ως:

$$P_{\max}=P(R)\big|_{R=r}=E'^2\,\frac{r}{(r+r)^2}=E'^2\,\frac{r}{(2r)^2}=E'^2\,\frac{r}{4r^2}=E'^2\,\frac{1}{4r}\Rightarrow$$

$$P_{\max}=\frac{E'^2}{4r}$$

Εναλλακτικά, η άσκηση θα μπορούσε να επιλυθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα Thevenin. Η ζητούμενη αντίσταση θα είναι $R=R_{Th}=r$ *και η καταναλισκώμενη ισχύς σε αυτή* $P_{\max}=\dfrac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}=\dfrac{E'^2}{4r}$. *Γενικά τα θέματα που αφορούν το θεώρημα της μέγιστης μεταφοράς ισχύος αντιμετωπίζονται αποτελεσματικότερα με χρήση του θεωρήματος Thevenin.Οι τύποι* $R=R_{Th}$ *και* $P_{\max}=\dfrac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$ *μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς απόδειξη.*